

# Mathematik für Medieninformatiker

Skriptum zu den Vorlesungen  
Hochschule Bremen - Fachbereich 4  
verfasst von Dirk K.

Version vom 28. März 2006



# Vorwort



Eigentlich bin ich kein wirklicher Freund von großen Vorreden und langatmigen Einleitungen. Wenn ich mir selber mal ein Buch kaufen sollte und im Laden potentielle Kandidaten begutachte, dann überspringe ich meist das standesgemäße Getexte am Anfang, welches mir meist nur subtil vermitteln will, wie didaktisch wertvoll dieses Buch doch sei und warum gerade hier das viele Geld gut angelegt ist. Würde ich mich demnach blind auf die Versprechungen im Vorwort verlassen, dann hätte ich schon vor dem Kauf verloren. Dabei kann ein gezielter Blick aufs Format weitaus aufschlussreicher als vielerlei flüchtige Floskeln sein. Das Format? ... Exakt, und damit ist keineswegs das bunte Cover oder chlorhaltige Umweltpapier, sondern viel eher die optische Gestaltung des Inhalts gemeint. Denn die essentielle Frage, ob ein Buch letztendlich etwas taugt oder nicht, kann eh nur durch wenige Stichproben im Laden abgeschätzt werden – ob es zwecks mangelhaftem Inhalt nach zwei Kapiteln in den Ofen wandert oder komplett durchgearbeitet wird, mag vielleicht in den Sternen stehen, doch leider niemals im Vorwort. Somit bleibt nur ein Blick aufs Format, denn was nützt ein guter Inhalt, wenn die Formatierung so grausig ist, dass das Lesen schon nach wenigen Seiten zur Qual wird? Soll tatsächlich vorkommen, und bei einigen Werken bekommt der Leser den Eindruck, als hätte der Autor sein sorgfältig gesammeltes Wissen in einem Anflug von Ekstase einfach aus sich hinaus gepresst – ohne Rücksicht auf Absätze & Co.

Nun, vielleicht ist meine Ansicht zum optischen Aufbau etwas überzogen – vielleicht musste ich mich auch einfach durch zu viele verhunzte Bücher und Skripte quälen –, doch ich denke, ein vernünftiger Aufbau erleichtert das Lesen und Lernen ungemein. Aus diesem Grunde werde mir zumindest die Mühe geben, den Stoff der Vorlesungen nicht einfach nur hinzurotzen, sondern mich neben dem Inhalt auch verstärkt um den formalen Aufbau zu kümmern. Sollte dabei ein optisch ansprechendes, doch leider völlig inhaltsfreies Werk verbrochen werden, so sei es mir verziehen.

Zum Skript selber, denn das vorliegende Werk, welches mit  $\text{\LaTeX}$ , allerlei Vektorprogrammen und kostbarer Lebenszeit im Laufe der Semester erstellt wird – und aktuell in der *dritten* Fassung vorliegt, die gerade mal zur Hälfte überarbeitet wurde –, soll einerseits den Inhalt der Vorlesungen „*Mathematik für Informatiker*“ wiedergeben, andererseits soll es den Stoff mit allerart Ergänzungen und Erklärungen komplettieren. Gleichwohl ersetzt es in keiner Weise die Vorlesungen und sollte auch niemanden davon abhalten, sich eigene Aufzeichnungen und Skizzen anzufertigen.

Ehe es endlich losgeht, sei noch etwas zu den mathematischen Termini im Skript angemerkt: Ein *Axiom* ist ein unbeweisbarer, in sich einsichtiger und unbestreitbarer Grundsatz, der als Basis für *deduktive* Systeme dient. Der lateinische Begriff *Deduktion*, der sich mit „Herabführung“ übersetzen lässt, bedeutet, im Gegensatz zur *Induktion*, die Ableitung besonderer Inhalte – Erkenntnisse, Wahrheiten, was auch immer – aus allgemeinen Sätzen. Als *Lemma* wird ein mathematischer Hilfssatz bezeichnet und *Korollar* ist kein japanischer Autotyp, sondern ein mathematischer Zusatz resp. eine Folgerung aus Regeln.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Allgemeine Grundlagen und Hilfsmittel</b>	<b>7</b>
1.1	Zeichen und Symbole . . . . .	7
1.2	Zahlenmengen . . . . .	8
1.2.1	Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ . . . . .	8
1.2.2	Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ . . . . .	9
1.2.3	Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ . . . . .	9
1.2.4	Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.3	Intervalle und der Betrag einer Zahl . . . . .	10
1.4	Die Summen- und Produktnotation . . . . .	11
1.5	Ringe und Körper . . . . .	12
1.6	Grundzüge der Arithmetik . . . . .	13
1.6.1	Nomenklatur der Grundrechenarten . . . . .	13
1.6.2	Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren . . . . .	13
1.6.3	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches . . . . .	14
1.6.4	Potenzen . . . . .	14
1.6.5	Wurzeln . . . . .	15
1.6.6	Logarithmen . . . . .	15
1.7	Grundzüge der Algebra . . . . .	16
1.7.1	Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	16
1.7.2	Binome und die quadratische Ergänzung . . . . .	17
1.7.3	Potenz-, Wurzel- und Exponentialgleichungen . . . . .	17
1.7.4	Ungleichungen . . . . .	18
1.8	Grundzüge der Geometrie . . . . .	19
1.8.1	Planimetrie . . . . .	19
1.8.2	Stereometrie . . . . .	24
1.8.3	Trigonometrie . . . . .	28
1.8.4	Euklidische Vektorrechnung . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Logik</b>	<b>36</b>
2.1	Junktoren . . . . .	36
2.2	Quantoren . . . . .	38
2.3	Wahrheitstabeln . . . . .	38
2.4	De Morgansche Regeln . . . . .	39
2.5	Allgemeingültige Ausdrücke der Logik . . . . .	39
2.6	Prädikatenlogik . . . . .	40
2.7	Beweismethoden . . . . .	40
2.7.1	Direkter Beweis . . . . .	41
2.7.2	Indirekter Beweis . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Mengen</b>	<b>42</b>
3.1	Naive Mengenlehre . . . . .	42
3.2	Mengenoperationen . . . . .	45
3.3	Rechenregeln für Mengen . . . . .	48
3.4	Tupel und das kartesische Produkt . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Relationen</b>	<b>51</b>
4.1	Ordnungsrelationen . . . . .	51
4.2	Äquivalenzrelationen . . . . .	52
4.3	Äquivalenzklassen . . . . .	52

<b>5</b>	<b>Abbildungen</b>	<b>53</b>
5.1	Eigenschaften von Abbildungen . . . . .	54
5.2	Inverse Abbildung und Komposition . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Boole-Verbände</b>	<b>56</b>
6.1	Definition und Axiome . . . . .	56
6.2	Binärfunktionen . . . . .	59
6.2.1	Disjunktive Normalform . . . . .	61
6.2.2	Konjunktive Normalform . . . . .	63
6.3	Karnaugh-Verfahren . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Induktion und Rekursion</b>	<b>64</b>
7.1	Vollständige Induktion . . . . .	64
7.2	Rekursion . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Zahlensysteme</b>	<b>66</b>
8.1	Zahlensysteme verschiedener Basen . . . . .	66
8.2	Gleitkommadarstellung . . . . .	67
8.3	Umrechnungsarten verschiedener Zahlensysteme . . . . .	68
8.4	Komplement und Stellenkomplement . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>71</b>
9.1	Folgen . . . . .	71
9.2	Infimum und Supremum . . . . .	72
9.3	Reihen . . . . .	73
9.4	Konvergenz und Divergenz . . . . .	73
9.5	Konvergenzkriterien . . . . .	74
<b>10</b>	<b>Die komplexen Zahlen</b>	<b>80</b>
10.1	Definition einer komplexen Zahl . . . . .	80
10.2	Operationen auf komplexen Zahlen . . . . .	81
10.3	Körperstruktur der komplexen Zahlen . . . . .	84
10.4	Trigonometrische Darstellung . . . . .	84
10.5	Die Eulersche Beziehung . . . . .	85
10.6	Umrechnung zwischen der Darstellung einer komplexen Zahl . . . . .	87
10.6.1	Polarform in die kartesische Form . . . . .	87
10.6.2	Kartesische Form in die Polarform . . . . .	88
10.7	Komplexe Lösungsmengen algebraischer Gleichungen . . . . .	89
<b>11</b>	<b>Die analytische Geometrie der Ebene</b>	<b>92</b>
11.1	Implizite und explizite Darstellungsform einer Gleichung . . . . .	92
11.2	Geraden . . . . .	93
11.3	Kegelschnitte . . . . .	96
11.4	Polarkoordinaten . . . . .	106
11.5	Zykloide . . . . .	111
11.6	Koordinatentransformation in der Ebene . . . . .	112
11.7	Abbildungen in der Ebene . . . . .	115
<b>12</b>	<b>Erste Schritte zur Linearen Algebra</b>	<b>117</b>
12.1	Vektorräume . . . . .	117
12.1.1	Linearkombinationen . . . . .	120
12.1.2	Lineare Abhängigkeit . . . . .	121
12.1.3	Unterräume, Basen und Erzeugendensysteme . . . . .	122
12.2	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	126
12.3	Der Gaußsche Algorithmus . . . . .	126

12.4	Einführung in Matrizen . . . . .	129
12.4.1	Besondere Matrizen . . . . .	130
12.4.2	Verknüpfungen auf Matrizen . . . . .	131
12.4.3	Rang einer Matrix . . . . .	133
12.5	Determinanten . . . . .	134
12.5.1	Eigenschaften von Determinanten. . . . .	137
12.5.2	Unterdeterminanten und algebraisches Komplement . . . . .	141
12.5.3	Laplacescher Entwicklungssatz für $n$ -reihige Determinanten . . . . .	142
12.6	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	143
12.7	Erweiterte Matrizen . . . . .	151
12.8	Euklidische Vektorräume . . . . .	156
12.8.1	Orthogonale Projektionen . . . . .	159
12.8.2	Vektor- und Spatprodukt . . . . .	160
12.8.3	Orthogonale Abbildungen . . . . .	163
12.8.4	Quadratische Formen . . . . .	164
<b>13</b>	<b>Analysis</b>	<b>168</b>
13.1	Allgemeine Eigenschaften von Funktionen . . . . .	168
13.2	Grenzwert einer Funktion . . . . .	170
13.3	Elementare Funktionen . . . . .	173
13.3.1	Polynomfunktionen – ganzrationale Funktionen . . . . .	173
13.3.2	Das Horner-Schema . . . . .	175
13.3.3	Interpolation durch Polynome . . . . .	178
13.3.4	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	180
13.3.5	Trigonometrische Funktionen . . . . .	181
13.3.6	Potenz- und Wurzelfunktionen . . . . .	183
13.3.7	Exponentialfunktionen . . . . .	184
13.3.8	Logarithmusfunktionen . . . . .	185
13.4	Differentialrechnung . . . . .	186
13.4.1	Ableitung einer Funktion . . . . .	186
13.4.2	Elementare Ableitungsregeln . . . . .	186
13.4.3	Relative und absolute Extrema . . . . .	186
13.4.4	Kurvendiskussion . . . . .	186
<b>14</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>192</b>
14.1	Parametrisierte Kurven . . . . .	192
14.2	Bézier-Kurven . . . . .	193
14.2.1	Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren . . . . .	195
14.2.2	Kurvenlänge . . . . .	196
<b>15</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>197</b>
15.1	Grundbegriffe der Kombinatorik . . . . .	197
15.2	Permutationen, Kombinationen und Variationen . . . . .	201
15.3	Stichproben einer $n$ -elementigen Grundgesamtheit . . . . .	203
<b>16</b>	<b>Stochastik</b>	<b>205</b>
16.1	Laplacescher Ereignisraum . . . . .	205
16.2	Kolmogorow-Axiome . . . . .	206
16.3	Abhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	208
16.4	Zufallsgrößen . . . . .	212
16.5	Streuungsbreite, Varianz und Standardabweichung . . . . .	213
16.6	Binominalverteilung . . . . .	215
16.7	Poisson-Verteilung . . . . .	217
16.8	Kontinuierliche Zufallsgrößen . . . . .	219

16.9 Gaußsche Normalverteilung . . . . .	221
16.10 Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	223
16.11 Schätzen von Erwartungswert und Varianz in der mathematischen Statistik . . . .	223
<b>A Griechisches Alphabet</b>	<b>224</b>
<b>B Mathematische Fachausdrücke im Englischen</b>	<b>225</b>

# 1 Allgemeine Grundlagen und Hilfsmittel

Allgemeine Grundlagen vermitteln, wie der Name erahnen lässt, das Grundwissen der weiterführenden Mathematik. Dazu zählt neben dem Repertoire an Begriffen, Symbolen und Notationen auch die wichtige Fertigkeit, mit Gleichungen umzugehen und diese ggf. äquivalent umzuformen. Das Grundlagenkapitel hat somit zweierlei Aufgaben: zum einen soll es eingerostete Fertigkeiten auffrischen, zum anderen dem Leser das entsprechende Handwerkszeug, hinlänglich und ausreichend, liefern, um einen mathematischen Text zumindest syntaktisch lesen zu können. Es versteht sich aber auch, dass im Folgenden ein gewisses Grundwissen, welches in etwa dem Wissensstand der Sekundarstufe II entspricht, einigermaßen vorhanden sein sollte – das Einmaleins wird nicht wiederholt.

## 1.1 Zeichen und Symbole

*„Ein Zeichen ist immer weniger als die Sache, auf die es hindeutet, und ein Symbol ist immer mehr, als wir auf den ersten Blick begreifen können. Deshalb bleiben wir nie beim Zeichen stehen, sondern gehen weiter zum Ziel, auf das es verweist, aber verweilen beim Symbol, weil es mehr verspricht, als es enthüllt.“*

Carl Gustav Jung

Zeichen und Symbole füllen unsere Innen- und Außenwelt. Wir haben uns so an sie gewöhnt, dass uns deren Existenz meist gar nicht mehr auffällt. Ein *Zeichen* ist in unserem Zusammenhang – der Begriff ist vielschichtig und kann auf unterschiedliche Arten genutzt werden – etwas, das bewusst auf etwas anderes hinweist, wohingegen das *Symbol* als Zeichen mit einem tieferen Sinn, in Worte kaum auszudrücken, aufgefasst werden kann. Wir haben es in der Mathematik also primär mit Zeichen zu tun, und wenngleich auch einige Zeichen im Laufe der nächsten Kapitel etwas umfangreicher beschrieben werden, so sollen an dieser Stelle schon einmal die Geläufigsten aufgelistet werden.

$\times$	Kartesisches Produkt	$\forall$	Allquantor
$=$	gleich	$\exists$	Existenzquantor
$\neq$	ungleich	$\wedge$	Konjunktion
$\sim$	proportional	$\vee$	Disjunktion
$:=$	wird definiert als	$\Rightarrow$	Implikation
$\approx$	ungefähr, nahezu gleich	$\Leftrightarrow$	Äquivalenz
$!$	Fakultät	$\neg$	Negation
$\infty$	unendlich	$\in$	Element aus
$<$	kleiner als	$\emptyset$	leere Menge
$>$	größer als	$\cap$	Schnittmenge
$\leq$	kleiner oder gleich als	$\cup$	Vereinigung
$\geq$	größer oder gleich als	$\setminus$	Differenz
$\int$	Integral	$\subset$	Teilmenge
$\sum$	Summe	$\rightarrow$	Mengenabbildung
$\prod$	Produkt	$\mapsto$	Elementabbildung

## 1.2 Zahlenmengen

Die verschiedenen Zahlenmengen fassen Zahlentypen zu einer gemeinsamen Struktur zusammen. Anders ausgedrückt wird die Basismenge der natürlichen Zahlen um gewisse Zahlenmengen erweitert und so zu einer neuen Menge definiert.

$\mathbb{N}$  Menge der natürlichen Zahlen  $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  Menge der ganzen Zahlen  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$  Menge der rationalen Zahlen  $\{\frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$  Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$  Menge der komplexen Zahlen

### 1.2.1 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die natürlichen Zahlen sind, wenn man es banal ausdrücken möchte, die Zahlen, die in der Natur vorkommen – also alles, was man mit den Fingern abzählen kann. Ob die *Null* nun dazugehört oder nicht, das war lange Zeit umstritten. In diesem Skript wird, sollte die Null eine Menge begleiten, dies mit  $\mathbb{N}_0$  ausgedrückt. Erwähnenswert sind hier die Axiome nach **Peano**<sup>1</sup>, die kurz aufgelistet werden.

1. Eins ist eine natürliche Zahl
2. Für jede natürliche Zahl  $n$  gibt es in der Menge der natürlichen Zahlen eine natürliche Zahl als Nachfolger von  $n$ .
3. Eins ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Ist der Nachfolger zweier natürlicher Zahlen  $n$  und  $m$  identisch, so sind  $n$  und  $m$  folglich identisch.
5. Jede Menge von natürlichen Zahlen, welche die Zahl Eins enthält und welche zu jeder Zahl, die sie enthält, auch deren Nachfolger enthält, enthält alle natürlichen Zahlen. Auf diesem Prinzip baut die *Vollständige Induktion* auf, die etwas später erläutert wird.

Auf der Menge der natürlichen Zahlen kann uneingeschränkt die Verknüpfung der **Addition** (+) und die der **Multiplikation** ( $\cdot$ ) angewendet werden.

$$\begin{aligned}\mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ +(n, m) &\longmapsto n + m \\ \cdot(n, m) &\longmapsto n \cdot m\end{aligned}$$

Addition und Multiplikation unterliegen folgenden wichtigen Anordnungsgesetzen.

$$\begin{aligned}\textbf{Kommutativität} \quad n + m &= m + n \\ n \cdot m &= m \cdot n \\ \textbf{Assoziativität} \quad (n + m) + p &= n + (m + p) \\ (m \cdot n)p &= m(n \cdot p) \\ \textbf{Distributivität} \quad n(m + p) &= n \cdot m + n \cdot p\end{aligned}$$

Es existiert die Eins als *neutrales Element* der Multiplikation, in  $\mathbb{N}_0$  existiert die Null als *neutrales Element* der Addition.

<sup>1</sup> *Guisepppe Peano*, ital. Mathematiker, 1858 - 1932



### 1.2.2 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Irgendwann vor langer Zeit reichten die natürlichen Zahlen zum Rechnen nicht mehr aus und man erweiterte die natürlichen Zahlen um die Elemente Null sowie den negativen ganzen Zahlen.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

Bei den natürlichen Zahlen wurde bereits vom **neutralen Element** gesprochen: das ist genau das Element, wo eine Verknüpfung ein Element auf sich selber abbildet, d.h. unverändert lässt. Bei den ganzen Zahlen ist das additive neutrale Element folglich die Null, denn es gilt folgender Zusammenhang.

$$\forall z \in \mathbb{Z} : 0 + z = z + 0 = z$$

Die Notation liest sich: „Für alle Elemente  $z$  aus der Menge  $\mathbb{Z}$  gilt: ...“ Neben dem neutralen Element ist das **inverse Element** von essentieller Bedeutung, denn dieses ist genau das Element, wo eine Verknüpfung ein Element auf das neutrale Element abbildet. Bei den ganzen Zahlen entspricht das inverse Element der Addition für eine beliebige Zahl  $z$  dementsprechend der Gegenzahl  $-z$ . Das inverse Element der Multiplikation lässt sich in  $\mathbb{Z}$  nicht finden. *Warum?*

$$\forall z \in \mathbb{Z} : z + (-z) = 0$$

### 1.2.3 Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Auch die Menge der ganzen Zahlen reichte bald nicht mehr aus und man musste diese Zahlenmenge um die ganzzahligen Brüche erweitern.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{a}{b} \text{ mit } (a, b) \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Durch diese Erweiterung existiert nun auch ein inverses Element der Multiplikation, welches uns bei den ganzen Zahlen noch verwehrt wurde. Das ist  $\frac{1}{q}$ .

$$\forall q \in \mathbb{Q} : q \cdot \frac{1}{q} = 1$$

Das Rechnen mit Brüchen ist nicht wirklich eine Herausforderung, man sollte die folgenden Gesetze der Addition und Multiplikation stets beachten.

$$\begin{array}{lcl} 1. & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} & = \frac{ad + bc}{bd} \\ 2. & \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} & = \frac{ac}{bd} \end{array}$$

Eine weitere Besonderheit der rationalen Zahlen ist die Tatsache, dass diese Menge noch immer abzählbar ist. Kann man bei den ersten Zahlenmengen mit seinen Finger auf irgendeine Zahl deuten und – bei natürlichen Zahlen nur in eine und bei ganzen Zahlen in beide Richtungen – fleißig abzählen, so haben die rationalen Zahlen zwar keinen direkten Nachfolger mehr, d.h. man findet immer eine Zahl, die einen noch kleineren Abstand zur betrachteten Zahl hat, aber sie sind dennoch abzählbar. Im Kapitel zu den Abbildungen wird auf diesen Zusammenhang noch einmal eingegangen. Es sind aber damit noch nicht alle Zahlenmengen abgedeckt, da sich gewisse Zahlen, z.B.  $\sqrt{2}$  oder  $\pi$ , nicht als Bruch darstellen lassen und man von unendlichen Dezimalbrüchen resp. *irrationalen Zahlen* spricht. Vereinigt man die rationalen Zahlen mit den irrationalen Zahlen, so erhält man wiederum eine neue Menge.

### 1.2.4 Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Diese neue Menge, reelle Zahlen genannt, hat die Eigenschaft, dass auf der Zahlengerade nun alle möglichen Punkte abgedeckt werden und zwischen jedem Intervall  $[a, b]$  mit  $a \neq b$  unendlich viele Punkte mit reellen Zahlen markiert werden können. Reelle Zahlen haben, wie auch die rationalen Zahlen, keine direkten Nachfolger und diese Menge ist *nicht* mehr abzählbar<sup>2</sup>. Wie auch bei den rationalen Zahlen gelten bei den reellen Zahlen dieselben Verknüpfungsaaxiome der Addition und Multiplikation. Es gibt ein eindeutig neutrales, sowie ein inverses Element der Addition und Multiplikation. Abschließend folgt ein erster kleiner Beweis zur Eindeutigkeit des Nullelements.

✕ *Beweis.*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$$

Diese auf den ersten Blick hoffnungslos trivial erscheinende Behauptung soll nun bewiesen werden. Der Sinn ist nicht, mit sinnlosen Beweisen sinnvoll über sinngemäße Sinnigkeiten zu sinnieren, sondern einen ersten Einblick in die mathematische Beweisführung zu erhalten. Der erste Schritt: wir fügen der Null das neutrale Element der Addition hinzu. Das ist legitim und verändert die Gleichung nicht.

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + 0$$

Danach wendet man einfach Gesetze an, die bereits bekannt sind. Hier bietet sich das Distributivgesetz an und man erhält nach etwas Umformung die folgende Gleichung.

$$x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

Jetzt addieren wir auf beiden Seiten  $-(x \cdot 0)$  und kommen zum Ergebnis, dass eine beliebige reelle Zahl mit der Null multipliziert tatsächlich auf die Null abgebildet wird. Anders ausgedrückt: Null mal irgendeine Zahl ist in der Tat null.

□

## 1.3 Intervalle und der Betrag einer Zahl

Wenn man Zahlenmengen betrachtet, so will man nicht immer die gesamte Menge betrachten, sondern untersucht meist nur einen bestimmten Ausschnitt dieser Menge. Man spricht von einem *Intervall* und hat folgende Notation eingeführt.

1.  $[a; b] \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall
2.  $(a; b) \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  offenes Intervall
3.  $[a; b) \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  nach rechts halboffenes Intervall
4.  $(a; b] \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  nach links halboffenes Intervall

Unter dem *Betrag* einer Zahl versteht man den Abstand einer reellen Zahl  $x$  auf der Zahlengeraden  $\mathbb{R}$  zum Nullpunkt. Er wird mit Betragstrichen notiert.

$$|a| \quad := \quad \begin{cases} a, & \text{wenn } a > 0 \\ 0, & \text{wenn } a = 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>Mithilfe von Dualzahlen wird dies im Kapitel zu den Zahlensystemen bewiesen.

## 1.4 Die Summen- und Produktnotation

Zur vereinfachten Darstellung von Aufzählungen werden oft sog. *Indizes* verwendet. Dabei handelt es sich um Laufvariablen, die meist mit  $i$  bezeichnet werden und entweder einen Index oder einen Wert repräsentieren. Nehmen wir dazu einige Beispiele.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}\} = \{a_i\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 50)$$

Eine Menge mit 50 beliebigen Elementen. Um sie nicht alle unnötig aufzuzählen, setzt man  $i$  als Laufvariable, die von 1 bis 50 durchläuft und die Elemente durchnummeriert.

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 12x_5 - 2x_6 = 128$$

Eine lineare Gleichung mit 6 Variablen. Auch hier dienen die Laufvariablen wiederum als Index, um die unbekannten Variablen geordnet darzustellen.

```
for (int i=0; i<20; i++) { doSomething(i); }
```

Das Äquivalent in der Programmierung. Eine typische Schleife, die 20 mal irgendeine Methode aufruft und den aktuellen Wert  $i$  übergibt. Will man nicht nur Elemente auflisten, sondern diese Auflistung mit einer **Summe** verknüpfen, so empfiehlt es sich, die Summe der Elemente mit Hilfe eines Summenzeichens – großes Sigma – aufzuschreiben. Unter dem Summenzeichen wird der Startindex definiert, der daraufhin bis zur Grenze  $n$  durchläuft. Zwei Beispiele und zwei Regeln.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ \sum_{i=1}^{100} i &= 1 + 2 + 3 + \dots + 100 &= 5050 \\ \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot a_i) &= \lambda \cdot a_1 + \lambda \cdot a_2 + \dots + \lambda \cdot a_n &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^n a_i, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

Was mit der Summe funktioniert soll natürlich auch als **Produkt** laufen. Das Produkt einer indizierten Menge lässt sich mit dem Produktzeichen – großes Pi – darstellen. Als Startindex lässt sich natürlich auch die Null setzen, was bei Werten aber nur in Extremfällen wirklich Sinn ergibt. Man beachte die Regeln für Skalare und dem indizierten Produkt eines Produktes.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_i &= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \\ \prod_{i=1}^n a &= a \cdot a \cdot \dots \cdot a &= a^n \\ \prod_{i=1}^n i &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n &= n! \\ \prod_{i=1}^n (\lambda \cdot a_i) &= \lambda \cdot a_1 \cdot \lambda \cdot a_2 \cdot \dots \cdot \lambda \cdot a_n &= \lambda^n \cdot \prod_{i=1}^n a_i, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \\ \prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) &= a_1 b_1 \cdot a_2 b_2 \cdot \dots \cdot a_n b_n &= \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^n b_i \right) \end{aligned}$$

## 1.5 Ringe und Körper

Hier geht es nicht um künstlichen Körperschmuck – sonst hieße es ja auch „Ringe *im* Körper“ –, sondern um wichtige algebraische Konstrukte, die einer Menge eine innere Struktur verleihen. Dazu müssen auf der Menge allerdings gewisse Operationen bzw. Verknüpfungen durchführbar sein. Da es sich bei Operationen an sich nicht immer um die bekannten Operationen Addition, Multiplikation, etc. handeln muss, wird im Folgenden ein Statthalter wie „ $\oplus$ “ verwendet, um anzudeuten, dass es sich um eine beliebige Verknüpfung handelt. Bei den Zahlenmengen wurde bereits der spezielle Fall der Anordnungsgesetze betrachtet, hier nun die allgemeine Definition.

1.    **Kommutativität**     $\forall a, b \in M : \quad a \oplus b = b \oplus a$
2.    **Assoziativität**     $\forall a, b, c \in M : \quad a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
3.    **Distributivität**     $\forall a, b, c \in M : \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$   
 $\forall a, b, c \in M : \quad (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$
4.    **neutrales Element**     $\exists e \in M : \quad a \oplus e = e \oplus a = a$
5.    **inverses Element**     $\exists a^{-1} \in M : \quad a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e$

Eine besondere Struktur ist der **Ring**. Man spricht davon, wenn für eine Menge  $R$  mit den Operationen  $(+)$  und  $(\cdot)$  die genannten Anordnungsgesetze mit Ausnahme des inversen Elements der Multiplikation gelten. Das ist bei der Menge der ganzen Zahlen der Fall, so dass man hier von einem Ring spricht. Kann man auf einer Menge  $K$  mit mindestens zwei Elementen und den Verknüpfungen  $(+)$  und  $(\cdot)$ , genannt „Addition“ und „Multiplikation“, die zwei Elementen aus  $K$  wiederum ein Element von  $K$  zuordnet, *alle* genannten Gesetze der Verknüpfung zeigen, dann spricht man bei der Menge von einem **Körper**. Das ganze auch in der formalen Schreibweise.

$$\begin{array}{ll} 1. & (+) K \times K \longrightarrow K \\ & (a, b) \longmapsto a + b \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 2. & (\cdot) K \times K \longrightarrow K \\ & (a, b) \longmapsto ab \end{array}$$

Die natürlichen Zahlen bilden weder einen Ring noch einen Körper, die rationalen und die reellen Zahlen hingegen weisen eine Körperstruktur auf. Das sind aber beileibe nicht die einzigen Körper. Man mag nun denken, dass besonders mächtige Zahlenmengen viel eher eine Körperstruktur aufweisen. Dem ist aber nicht zwangsläufig so und ich deute als Beispiel einen binären Körper mit nur zwei Elementen an.

$$\begin{array}{llll} \text{Sei } K = \{0, 1\} \text{ mit} & 0 + 0 & := & 0 \quad \text{und} \quad 0 \cdot 0 & := & 0 \\ & 0 + 1 & := & 1 \quad \text{und} \quad 0 \cdot 1 & := & 0 \\ & 1 + 0 & := & 1 \quad \text{und} \quad 1 \cdot 0 & := & 0 \\ & 1 + 1 & := & 0 \quad \text{und} \quad 1 \cdot 1 & := & 1 \end{array}$$

Durch die Tatsache, dass ich die Operation „ $1 + 1$ “ wieder auf die Null abbilde, das ist durchaus legitim, erzeuge ich kurioserweise eine Struktur, die den geforderten Körpergesetzen gehorcht und in der man tatsächlich rechnen kann. Solche *endlichen Körper* der Mächtigkeit  $q$  werden auch als  $GF(q)$  bezeichnet, das steht für *Galois*<sup>3</sup>-*Field*, wobei der Begriff „Field“ die englische Vokabel für Körper ist.

<sup>3</sup>Evariste Galois, franz. Mathematiker, 1811 - 1832

## 1.6 Grundzüge der Arithmetik

Die Arithmetik, was sich als Begriff aus dem Griechischen mit „Zahlenlehre“ übersetzen lässt, ist ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik und untersucht die Beziehungen von Zahlen untereinander. Die wichtigsten Aspekte sollen in diesem Kapitel abgedeckt oder zumindest angeschnitten werden.

### 1.6.1 Nomenklatur der Grundrechenarten

Da solcherlei Begriffe leicht durcheinander gewirbelt werden und man sich prächtig blamiert, wenn das Ergebnis der Addition unbedacht als Produkt bezeichnet wird, sollen hier kurz und schmerzfrei die richtigen Begriffe eingebrannt werden.

1. <b>Addition</b>	$a$	+	$b$	=	$c$
	Summand		Summand		Summe
2. <b>Subtraktion</b>	$a$	−	$b$	=	$c$
	Minuend		Subtrahend		Differenz
3. <b>Multiplikation</b>	$a$	·	$b$	=	$c$
	Faktor		Faktor		Produkt
4. <b>Division</b>	$a$	:	$b$	=	$c$
	Dividend		Divisor		Quotient

### 1.6.2 Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren

Unter einer *Primzahl* versteht man eine natürliche Zahl, die nur durch sich selbst und durch die Zahl Eins teilbar ist – also die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... und noch eine große Handvoll mehr, denn die Menge der Primzahlen hat unendlich viele Elemente.

$$\forall n \in \mathbb{N} : n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$$

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von ausschließlich Primzahlen, in diesem Sinne Primfaktoren genannt, darstellen. Dazu ein paar Beispiele.

- $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^1$
- $1540 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1$
- $29106 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^2 \cdot 11^1$

Empfehlenswert hierbei ist das aufsteigende Überprüfen der Primzahlen, ob und wie oft die zu zerlegende Zahl durch diese zu teilen ist. Dazu noch ein Beispiel.

$$\begin{aligned}
 2100 &= 2 \cdot 1050 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 525 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 375 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7
 \end{aligned}$$

### 1.6.3 Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

Ist eine Zahl  $a \in \mathbb{N}$  ohne Rest durch eine Zahl  $b \in \mathbb{N}$  teilbar, ist also  $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ , dann heißt  $a$  Vielfaches von  $b$  und  $b$  Teiler von  $a$ . Den größten gemeinsamen Teiler notiert man mit  $\mathbf{ggT}(a, b)$  und das kleinste gemeinsame Vielfache mit  $\mathbf{kgV}(a, b)$ . Die Zerlegung in Primzahlen ist bei der Suche nach dem  $\mathbf{ggT}(a, b)$  oder dem  $\mathbf{kgV}(a, b)$  hilfreich, sofern die Zahl nicht gerade übermäßig groß ist.

$$\begin{aligned} a &= p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} \\ b &= p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \cdot \dots \cdot p_k^{s_k} \end{aligned}$$

Hat man also zwei natürliche Zahlen  $a, b$  bereits in Primfaktoren zerlegt, dann kann sich der  $\mathbf{ggT}(a, b)$  über das Produkt der kleinsten Potenzen und das  $\mathbf{kgV}(a, b)$  über das Produkt der größten Potenzen berechnen lassen.

$$\begin{aligned} \mathbf{ggT}(a, b) &= \prod_{i=1}^k p_i^{\min(r_i, s_i)} \\ \mathbf{kgV}(a, b) &= \prod_{i=1}^k p_i^{\max(r_i, s_i)} \end{aligned}$$

Man bildet nach dem Vergleichen somit für jede Basis  $p$  das Produkt der jeweils kleinsten oder größten Potenzen. Betrachten wir zur Veranschaulichung ein Beispiel mit den etwas unbequemen Zahlen  $a = 29106$  und  $b = 18200$ .

$$\begin{aligned} 29106 &= 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \\ 18200 &= 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^1 \\ \mathbf{ggT}(29106, 18200) &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 = 14 \\ \mathbf{kgV}(29106, 18200) &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 = 37837800 \end{aligned}$$

### 1.6.4 Potenzen

Die  $n$ -fache Potenz beinhaltet das  $n$ -fache Produkt einer reellen Zahl  $a$  mit sich selbst. Man beachte, dass für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Potenz  $a^0$  als 1 und  $0^0$  nicht definiert ist.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Beim Rechnen mit Potenzen lassen sich gewisse Regeln anwenden, die schnell herzu-leiten sind und beim Umformen von Ausdrücken oft nützlich sind.

1.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2.  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  mit  $a \neq 0$
3.  $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4.  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$  mit  $b \neq 0$
5.  $(a^n)^m = a^{nm}$

Betrachten wir zwei kleine Beispiele, an denen sich einige der Potenzgesetze zunutze machen und das Erscheinungsbild somit deutlich vereinfachen.

$$\begin{aligned} 1. \quad \left(\frac{a^3 b^{-6}}{\clubsuit}\right)^{-2} + \left(\frac{\clubsuit^{\frac{2}{3}}}{a^2 b^{-4}}\right)^3 &= a^{-6} b^{12} \clubsuit^2 + a^{-6} b^{12} \clubsuit^2 = 2(a^{-6} b^{12} \clubsuit^2) \\ 2. \quad 64^3 \cdot 4 \cdot 128^{-1} \cdot 4^6 &= (2^6)^3 \cdot 2^2 \cdot 2^{-7} \cdot (2^2)^6 = 2^{18+2-7+12} \end{aligned}$$

### 1.6.5 Wurzeln

Unter der  $n$ -ten Wurzel einer nichtnegativen reellen Zahl  $a$  versteht man die Zahl  $b$ , die  $b^n = a$  erfüllt und man mit  $b = \sqrt[n]{a}$  notiert. Ferner lässt sich die  $n$ -te Wurzel einer  $m$ -ten Potenz als eine Potenz mit rationalen Exponenten ausdrücken.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Gerade Wurzeln sind nur für  $a \geq 0$  definiert. Ungerade dagegen für beliebige reelle  $a$ . Wie bei den Potenzen existieren auch bei den Wurzeln Regeln der Vereinfachung.

1.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  mit  $b \neq 0$
3.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = a^{\frac{n+m}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$
4.  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Ein paar exemplarische Umformungen sollen abschließend zeigen, was mit Wurzeln so alles angestellt werden kann, wenn man stets die Regeln beachtet.

1.  $\sqrt{9} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
2.  $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-1) \cdot 8 \cdot 125} = (\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125}) = -10$
3.  $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

### 1.6.6 Logarithmen

Wird bei Exponentialgleichungen der Form  $a^x = b$  die reelle Zahl  $x$  gesucht, mit der die Basis  $a$  zu potenzieren ist, um die Zahl  $b$  zu erhalten, so spricht man bei diesem Vorgang vom Logarithmieren. Für den Logarithmus gilt somit.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

Logarithmen können alle möglichen Basen haben; die gebräuchlichste Basis  $a = 10$  notiert sich  $\lg a$ . Ähnliches gilt für die Basis  $e$ , den *logarithmus naturalis*, der sich mit  $\ln a$  notiert. Auch hier existieren gewisse Gesetze, die man sich einprägen sollte.

1.  $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$
2.  $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
3.  $\log x^a = a \cdot \log x$
4.  $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$

Als Beispiel dient nun eine elementare Umformung, wenn in folgender Gleichung mit Logarithmen sowie  $a, b, x \in \mathbb{R}^+, a > 1$  nach der Unbekannten  $x$  aufgelöst werden soll.

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{7 + \log_3(a^x)} &= b \\ \Leftrightarrow 7 + \log_3(a^x) &= b^5 \\ \Leftrightarrow a^x &= 3^{b^5 - 7} \\ \Leftrightarrow x &= (b^5 - 7) \log_a 3 \end{aligned}$$

## 1.7 Grundzüge der Algebra

Mit den Grundzügen der Algebra ist der fundamentale Umgang mit Unbekannten, Termen und algebraischen Gleichungen gemeint. Unter einem „Term“ versteht man eine Variable an sich oder eine Zusammensetzung von Zahlen, Variablen und Operationszeichen. Terme lassen sich bekanntlich nur dann zusammenfassen, wenn sie *gleichartig* sind. So ist „ $5\spadesuit + 2\spadesuit + 4\spadesuit$ “ äquivalent zu „ $11\spadesuit$ “, wobei die 11 bekanntlich als *Koeffizient* bezeichnet wird. Dann sollte man noch wissen, dass ein Minuszeichen vor einer Klammer alle Vorzeichen in der Klammer umdreht und ein Gebilde wie z.B.  $-(12b - 4a - (-5c + 3d))$  nach Auflösen der Klammern zu  $4a - 12b - 5c + 3d$  wird.

### 1.7.1 Gleichungen $n$ -ten Grades

Gleichungen bestehen, wie der Name unschwer vermuten lässt, aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. Um die Unbekannte zu isolieren, lassen sie sich äquivalent umformen, wenn auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Operation durchgeführt wird – wobei Multiplikation und Division mit 0 natürlich wenig Sinn ergeben und auch nicht erlaubt sind. Mit den *linearen Gleichungen*, den Gleichungen *ersten Grades*, wird auch der erste elementare Typ präsentiert: Typen von elementaren Gleichungen mit einer Unbekannten  $x$ , die sich theoretisch bis zum  $n$ -ten Grad erstrecken, wobei die Lösung solcher Gleichungen meist nur noch durch numerische Näherungsverfahren angenähert werden kann.

$$\text{I. Grad} \quad ax + b = 0 \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\text{II. Grad} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\text{III. Grad} \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Die Lösungsmenge „ $\mathbb{L}$ “ einer *linearen* Gleichung ist nichts anderes als eine einfache Umformung nach  $x$ . Bei den *quadratischen* Gleichungen, den Gleichungen zweiten Grades, kann man die Lösungen entweder durch die Haupt- oder Normalform bestimmen.

$$\text{I. Grad} \quad \mathbb{L} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

$$\text{II. Grad} \quad \text{„Hauptform“} \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

$$\text{II. Grad} \quad \text{„Normalform“} \quad \mathbb{L} = \left\{ -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \right\} \quad \text{mit} \quad a = 1$$

Beim ersten Grad existiert immer genau eine Lösung. Bei quadratischen Gleichungen, sofern der Term unter der Wurzel größer null ist, existieren zwei Lösungen. Wird der Term unter der Wurzel gleich null, dann existiert nur *eine*; wird er kleiner als null, dann existiert im Reellen *keine* Lösung<sup>4</sup>. Der Vorteil der „Hauptform“ ist, dass die Gleichung nicht zuerst umgeformt werden muss. Bei der „Nebenform“, die im Schulfargon gerne als *pq*-Formel verkauft wird, muss hingegen zuerst der erste Koeffizient zur Eins äquivalent umgeformt werden, so dass die Gleichung in der Form  $x^2 + bx + c = 0$  vorliegt. Beispiele zum besseren Verständnis.

$$\text{i.} \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8} \quad \mathbb{L} = \{2, 4\}$$

$$\text{ii.} \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \quad \mathbb{L} = \{2, 4\}$$

$$\text{iii.} \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 4} \quad \mathbb{L} = \{2\}$$

<sup>4</sup>Im Kapitel zu den komplexen Zahlen wird gezeigt, dass im Komplexen immer eine Lösung existiert.



Bevor man bei einer Gleichung vom Grad  $\geq 2$  allerdings eine der genannten Formen anwendet, sollte man zuerst überprüfen, ob sich die Gleichung nicht in *Linearfaktoren* zerlegen lässt. Durch solcherlei Faktorisierung, die allerdings nicht für alle Koeffizienten  $a, b, c$  funktioniert, lässt sich die Lösung ohne Rechenaufwand schnell ablesen, da die Gleichung stets erfüllt ist, wenn einer der Faktoren zu null wird.

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad x^2 - 6x + 8 = 0 & \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 & \mathbb{L} = \{2, 4\} \\ \text{ii.} \quad 3x^2 + 14x - 5 = 0 & \Leftrightarrow (3x - 1)(x + 5) = 0 & \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{3}, -5\right\} \\ \text{iii.} \quad x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 & \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 3) = 0 & \mathbb{L} = \{-1, 1, 3\} \end{aligned}$$

### 1.7.2 Binome und die quadratische Ergänzung

Das Prinzip, welches bereits bei der Faktorisierung angeschnitten wurde, soll nun auf die drei bekannten *binomischen Formeln* ausgedehnt werden. Diese lauten wie folgt.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad (a + b)^2 & \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{II.} \quad (a - b)^2 & \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{III.} \quad (a + b)(a - b) & \Leftrightarrow a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Im Kapitel zur Kombinatorik wird später der allgemeine binomische Lehrsatz erklärt, mit dessen Hilfe sich ein binomischer Term der  $n$ -ten Potenz herleiten lässt. Momentan soll das Quadrat aber genügen, denn einen quadratischen Ausdruck der Form  $x^2 + ax + b$  kann in einen Teil einer binomischen Formel und einen Rest gesplittet werden.

$$x^2 + ax + b \Leftrightarrow x^2 + ax + b + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

Zum Lösen einer quadratischen Gleichung ist diese Methode weniger geeignet, doch manchmal ist es vorteilhaft, wenn man einen quadratischen Ausdruck, der sich nicht in eine binomische Form drücken lassen will, durch quadratische Ergänzung in eben jene Form bringt. Ein paar Beispiele zur Verdeutlichung.

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad x^2 + 4x - 6 & \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 6 - 4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 10 \\ \text{ii.} \quad x^2 - 10x + 5 & \Leftrightarrow (x - 5)^2 + 5 - 25 \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 20 \\ \text{iii.} \quad x^2 + 8x + 2 & \Leftrightarrow (x + 4)^2 + 2 - 16 \Leftrightarrow (x + 4)^2 - 14 \end{aligned}$$

### 1.7.3 Potenz-, Wurzel- und Exponentialgleichungen

Man spricht von *Potenz-* bzw. *Wurzelgleichungen*, wenn eine Gleichung auf die Form  $x^{\frac{m}{n}} = a$  gebracht wird. Ist das der Fall, dann muss mit  $n$  potenziert und die  $m$ -te Wurzel gezogen werden. Diese Gleichungen sind nicht sonderlich wild. Ein Beispiel.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^3 - 48} &= 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 48 &= 2^4 \\ \Leftrightarrow x^3 &= 64 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

Problematisch wird es allerdings, wenn man unachtsamerweise übersieht, dass die Lösung einer Wurzel – zumindest im Reellen – keine negative Zahl ist. Das schert aber eine Äquivalenzumformung wenig und man kommt zu einem „richtig erhaltenen“ Ergebnis, welches dennoch keine Lösung der Gleichung sein kann.

Ein solcher Fall soll nun betrachtet werden. Man nehme eine gewöhnliche Wurzelgleichung, die allerdings bei genauem Hinsehen keine Lösung haben kann, und forme diese zu einem Ergebnis um. Danach wird geprüft, ob es eine korrekte Lösung ist.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 5} + 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} &= -3 \\
 \Leftrightarrow x^2 + 5 &= 9 \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 4 \\
 \Leftrightarrow x &= 2
 \end{aligned}$$

Macht man die Probe, dann kann  $x = 2$  keineswegs eine Lösung der Gleichung sein, da  $9 \neq 0$  ist. Bei Wurzelgleichungen ist somit eine Probe der Lösung immer empfehlenswert. Beim letzten hier betrachteten Gleichungstyp handelt es sich um *Exponentialgleichungen* – die Unbekannte steht im Exponenten –, für die folgendes gilt:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln b}{\ln a} \quad \text{mit } a, b > 0 \text{ und } a \neq 1$$

Solch eine Exponentialgleichung soll nun unter die Lupe genommen werden, um an ihr den prinzipiellen Lösungsverlauf zu exerzieren.

$$\begin{aligned}
 2^{x^2+x-4} &= 4 \\
 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 &= \log_2 4 \\
 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \mathbb{L} &= \{2, -3\}
 \end{aligned}$$

#### 1.7.4 Ungleichungen

Bei Ungleichungen haben wir es mit zwei Termen und einer Relation anstelle einer Gleichheit zu tun. Dieses wird dann durch die Relationszeichen ausgedrückt, die in diesem Skript hier und dort auch schon einmal in Erscheinung getreten sind. Da Ungleichungen Aussageformen im Sinne der Aussagenlogik sind<sup>5</sup>, gelten für die Lösungen Intervalle, welche für bestimmte Wertepaare die Ungleichung zu einer wahren Aussage machen.

$$42x \geq 21 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Trickreicher wird es, wenn in einer Ungleichung durch die Unbekannte geteilt wird, denn dann muss unterschieden werden, ob sie größer oder kleiner null ist. Ferner sollte man beachten, dass die Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl das Relationszeichen umkehrt: Aus  $\leq$  wird  $\geq$ , aus  $>$  wird  $<$  und umgekehrt. Drei Beispiele.

$$\begin{aligned}
 \text{i.} \quad -5x < 10 &\Leftrightarrow x > -2 &\Rightarrow \mathbb{L} &= (-2, \infty) \\
 \text{ii.} \quad \frac{42}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 : & 42 \leq x \\ x < 0 : & 42 \geq x \end{cases} &\Rightarrow \mathbb{L} &= (-\infty, 0) \\
 & & & \mathbb{L} = [42, \infty) \\
 \text{iii.} \quad (x+2)^2 < 4 &\Leftrightarrow x+2 < 2 \wedge x+2 > -2 &\Rightarrow \mathbb{L} &= (-4, 0)
 \end{aligned}$$

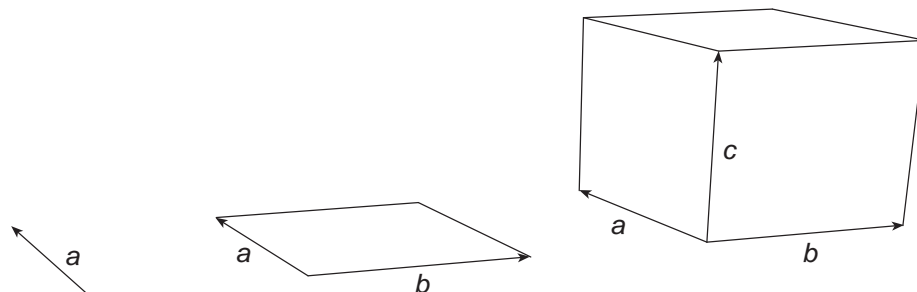
<sup>5</sup>Aussagenlogik & Co. wird in Kapitel 2 erläutert.

## 1.8 Grundzüge der Geometrie

Der griechische Begriff „Geometrie“, der sich mit *Erdmessung* übersetzen lässt, beinhaltet grob gesagt als Teilgebiet der Mathematik die Gesetzmäßigkeiten zwischen Linien, Flächen und Körpern – streng genommen wird hier sprachlich unterschieden zwischen der *Planimetrie*, der Geometrie der ebenen Gebilde, der *Stereometrie*, der Geometrie der körperlichen Gebilde, und der *Trigonometrie*, der Winkelmessung der Dreiecke. Doch bevor einem die Fachausdrücke wie Kanonenschläge um die Ohren fliegen, sollte man sich mit der Geometrie als „Lehre des allgemeinen Raumes“ vorerst begnügen.

### 1.8.1 Planimetrie

Begonnen wird mit elementarer Definition der wichtigsten Begriffe, die zwar alle bei Ihnen als Leser von der Bedeutung her bekannt sind, aber, damit es wissenschaftlich klingt, dennoch hier offiziell definiert werden. Da hätten wir z.B. folgende Kandidaten.



Die Abb. illustriert die Ausdehnungen im Raum.

**Punkte** Ein Punkt als dimensionsloses Etwas dient als Begrenzung von Linien und hat im Raum keine Ausdehnung. Wird er in der ersten Dimension bewegt, dann erzeugt er eine Linie, die, sofern sie nicht begrenzt ist, als *Gerade* bezeichnet wird.

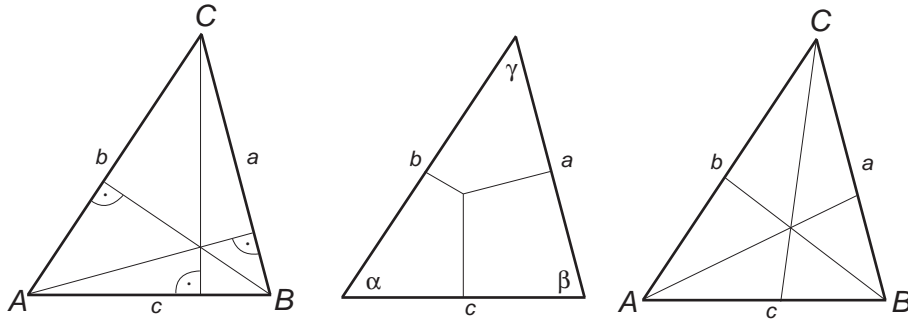
**Linien** Linien haben nur ihre Länge als Ausdehnung und begrenzen alle nur möglichen Flächen. Wird eine Gerade auf einer Seite durch einen Punkt begrenzt, dann bezeichnet man sie als *Strahl*. Ist eine Gerade durch zwei feste Punkte begrenzt, dann spricht man von einer *Strecke*. Bewegt man eine Linie in der zweiten Dimension, dann erzeugt diese eine Fläche.

**Flächen** Flächen mit den Eigenschaften Länge und die Breite dienen als Begrenzungen von Körpern. Bewegt man eine Fläche in der dritten Dimension, dann erzeugt diese einen Körper.

**Körper** Körper schöpfen aus allen drei Dimensionen, denn neben der Breite und der Länge ist nun auch die Höhe hinzugekommen. Nicht wirklich neu, und unser wichtigster Raum ist quasi das Universum, in welchem allerart Körper wiederum Teile des allgemeinen Raumes bilden. Wird ein Körper in der vierten Dimension bewegt, dann transzendiert er den Raum und verschwindet einfach ... was denn, glauben Sie nicht? Wohl noch nie im Bermuda-Dreieck geurlaubt, wie?

Geraden erfahren wiederum eine besondere Bezeichnung, wenn sie in Relation zu einer Kreislinie stehen. Schneidet eine Gerade eine Kreislinie in genau *einem* Punkt, so spricht man von einer *Tangente* – sind es *zwei* Punkte, dann nennt man sie *Sekante*. Darüberhinaus existiert noch der Begriff *Passante* – kein Schnittpunkt – und der Ausdruck *Zentrale*, d.h. eine Sekante, die auch durch den Kreismittelpunkt verläuft.

Bevor es mit Dreiecken rund geht, sollte noch etwas elementares zu Winkeln erzählt werden. Gehen von einem Punkt, dem sog. Scheitelpunkt, zwei Strahlen aus, dann bilden diese einen Winkel, den man in der Einheit Grad angeben kann. Eine volle Umdrehung entspricht  $360^\circ$  und  $1^\circ$  entspricht  $60'$  Winkelminuten. Wie bei der Uhr existieren auch sog. Winkelsekunden, die wiederum eine Winkelminute in 60 Schritte aufteilen, d.h.  $1' = 60''$ . Somit begegnet man in der Praxis Ausdrücken wie  $32^\circ 25' 20''$ , die sich natürlich auch dezimal ausdrücken lassen:  $32,4222^\circ$ . Nun aber zu **Dreiecken**.



Die Abb. zeigt die Höhen, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden.

Die Summe der Innenwinkel  $\alpha + \beta + \gamma$  im Dreieck beträgt immer  $180^\circ$  und die sog. *Dreiecksungleichung* besagt, dass die Summe zweier Seiten immer größer als die Länge der dritten Seite ist. Ähnliches gilt für den Betrag der Differenz zweier Seiten.

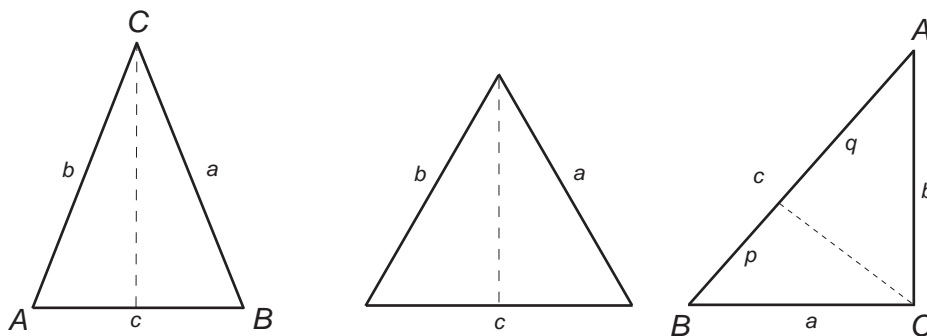
$$\forall \Delta : \quad a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$

$$\forall \Delta : \quad |b - a| < c \quad |c - a| < b \quad |c - b| < a$$

Da sich aus einem Dreieck bei Verdopplung dessen ohne Schwierigkeit ein Rechteck basteln lässt, gilt für den **Flächeninhalt** die Formel „Grundseite mal Höhe durch zwei“. Es geht aber auch mit zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

$$\begin{aligned} \forall \Delta : \quad A_{\Delta} &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Da mit dem Begriff „Dreieck“ eigentlich alles bezeichnet wird, was drei Ecken hat, wird bei besonderen Dreiecken mit bestimmten Eigenschaften noch einmal differenziert.

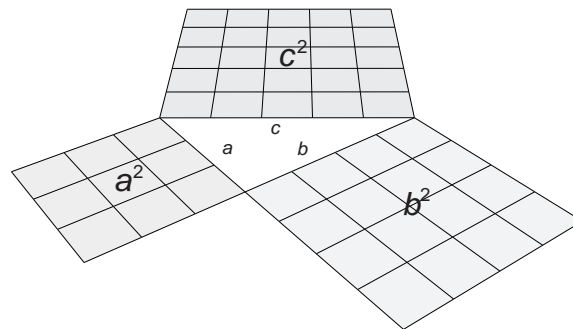


Die Abb. zeigt ein gleichschenkeliges, ein gleichseitiges und ein rechtwinkliges Dreieck.

Die *gleichschenkligen* Dreiecke zeichnen sich durch zwei gleich lange Seiten und somit auch durch zwei gleich große Winkel aus. Die *gleichseitigen* Dreiecke haben, wie der Name uns bereits verrät, drei gleich lange Seiten und mit jeweils  $60^\circ$  drei gleich große Winkel. Für sie gelten auch besondere Formeln für Höhe und Flächeninhalt.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Der wichtigste Vertreter ist wohl das rechtwinklige Dreieck, da dessen Eigenschaften in vielerlei Dingen besonders nützlich sind. Bei solchen Dreiecken nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *Hypothense* und die den rechten Winkel bildenden Seiten *Katheten*. Die bekannteste Formel bei diesem Vertreter ist wohl der Satz des Pythagoras<sup>6</sup>. Er besagt, dass wenn man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks quadriert, somit geometrisch drei Quadrate entstehen, das Quadrat über der Hypothense vom Flächeninhalt gleich der Summe der Quadrate über den Katheten ist.



Die Abb. illustriert den Satz des Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Weiterhin sind der Höhensatz und die Kathetensätze im rechtwinkligen Dreieck von Bedeutung. Wie bei der Abbildung schon aufgezeigt, unterteilt die Höhe die Grundseite  $c$  in die Abschnitte  $p$  und  $q$ . Damit gelten im rechtwinkligen Dreieck folgende Sätze.

I.	Kathetensätze nach Euklid	$a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$
II.	Höhensatz	$h^2 = p \cdot q$

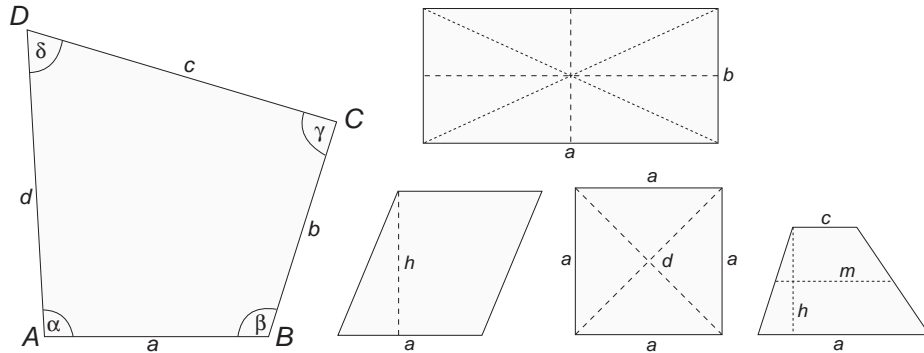
Mithilfe des Satzes von Pythagoras und des Kathetensatzes von Euklid<sup>7</sup> für die Seite  $b$  lässt sich durch Umformung schnell der Höhensatz herleiten.

$$\begin{aligned}
 \text{i.} \quad b^2 &= q^2 + h^2 \\
 \text{ii.} \quad b^2 &= q \cdot c \\
 &\Leftrightarrow q(p + q) \\
 &\Leftrightarrow qp + q^2 \\
 \text{iii.} \quad q^2 + h^2 &= qp + q^2 \\
 h^2 &= p \cdot q
 \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Pythagoras von Samos, griech. Philosoph, 580 - 496 v. Chr.

<sup>7</sup>Euklid, griech. Mathematiker, ~ 300 v.Chr.

Die nächsten Betrachtungen widmen sich den **Vierecken**. Hier lassen sich *allgemeine Vierecke* als eine unstrukturierte Anordnung von vier miteinander verbundenen, sich nicht überschneidenden, Linien betrachten. Wenn man sich überlegt, dass ein Quadrat aus vier rechten Winkeln besteht und diese in der Summe zu  $360^\circ$  werden, dann liegt es nahe, dass dies auch für alle anderen Vierecke gilt – beim Verzerren gehen schließlich keine Winkel verloren, denn wenn ein Eckpunkt verschoben wird, dann erhöht oder verringert sich zwangsläufig mindestens ein korrespondierender Winkel.

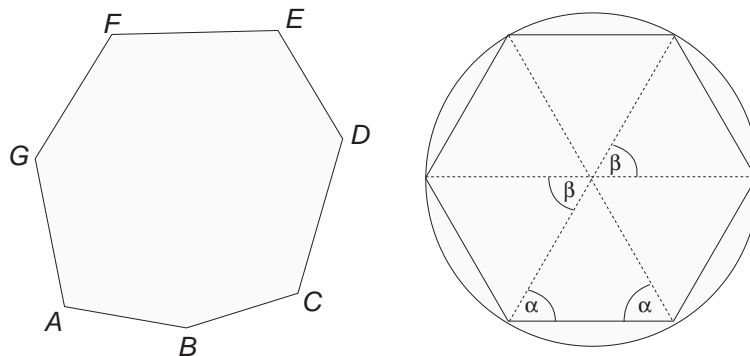


Die Abb. zeigt ein allg. Viereck und die Sonderfälle Parallelogramm, Quadrat, Rechteck und Trapez.

Der Flächeninhalt eines Vierecks ist i.d.R. nicht sonderlich schwer zu berechnen. Einzig beim allgemeinen Viereck ist es etwas aufwändiger. Abhilfe schafft hier eine Diagonale, die das Viereck in zwei Dreiecke teilt, über die sich dann mit den bekannten Formeln auch der Flächeninhalt berechnen lässt. Für die anderen Vierecke gilt:

- |      |                 |   |
|------|-----------------|---|
| I.   | Quadrat:        | $A = a^2$   |
| II.  | Rechteck:       | $A = a \cdot b$                                       |
| III. | Parallelogramm: | $A = a \cdot h$                                       |
| IV.  | Trapez:         | $A = m \cdot h \Leftrightarrow \frac{a+c}{2} \cdot h$ |

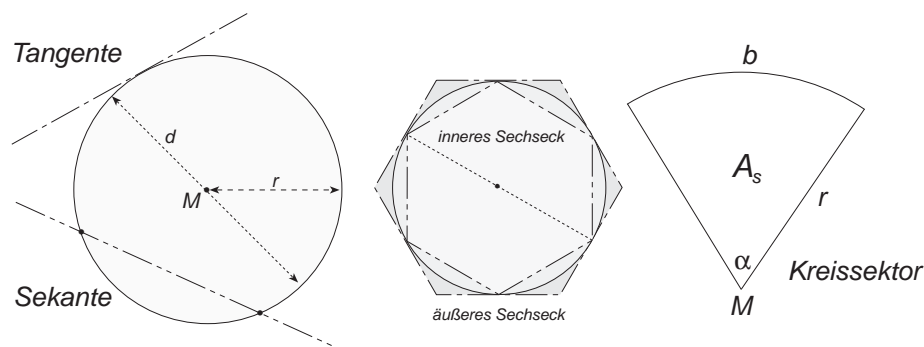
Nach den Vierecken folgen als nächstes die als **n-Ecke** bezeichneten „Vielecke“, die sich wiederum unterscheiden lassen zwischen *allgemeinen* und *regulären n-Ecken*.



Die Abb. zeigt ein allgemeines und ein reguläres n-Eck.

Die Winkelsumme im  $n$ -Eck berechnet sich über die Formel  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Ein reguläres  $n$ -Eck liefert  $n$  identische Seiten und Innenwinkel sowie die Möglichkeit, einen Umkreis durch alle Ecken zu ziehen. Für  $n \rightarrow \infty$  wird aus einem  $n$ -Eck ein Kreis.

Damit wären wir nun bei der letzten hier beschriebenen geometrischen Figur angelangt, dem **Kreis**. Auch wenn unser Auge schon ein 36-Eck für einen reinrassigen Kreis hält, so ist ein „echter“ Kreis in der Tat nur dann gegeben, wenn die Anzahl der Ecken eines regulären  $n$ -Ecks gegen unendlich geht – bei der Konstruktion von Kreisen wird aber niemand den Weg über das Vieleck gehen, sondern eher einen Zirkel benutzen oder einen Vektor fester Länge um  $360^\circ$  rotieren lassen. Fehlt der Vollständigkeit halber noch die berühmte Kreiszahl  $\pi$ , die angibt ... ja, was eigentlich? Nun, hier sollte man sich zuerst verdeutlichen, dass sich beim Kreis einmal ein inneres und auch ein äußeres Vieleck einbetten lässt. Nehmen wir einen Kreis mit dem Durchmesser  $d = 1$ , und beginnen damit, ein *äußeres* Quadrat einzuzichnen, so hat dieses den Umfang  $u = 4$ , wohingegen nach dem Satz des Pythagoras für ein *inneres* Quadrat der Umfang  $u \approx 2,83$  gilt. Lassen wir nun die Anzahl der Ecken  $n \rightarrow \infty$  laufen, dann nähern sich beide Umfänge – die *inneren* Umfänge nehmen zu und die *äußeren* Umfänge nehmen ab – der irrationalen Zahl  $\pi = 3,1415926 \dots$ . Ein Kreis mit dem Radius einer halben Längeneinheit hat demzufolge den Umfang  $\pi \approx 3,14$ .



Die Abb. zeigt allerlei wichtige Elemente beim Kreis.

Eine *Tangente*<sup>8</sup> ist eine Gerade, die einen Kreis in genau einem Punkt berührt. Kreis und Gerade haben also nur einen einzigen gemeinsamen Punkt, wobei der Vektor des Kreisradius senkrecht auf der Geraden steht. Die *Sekante* hingegen ist als Gerade durch eine gebogene Linie definiert, so dass hier mit dem Kreis zwei Schnittpunkte existieren. Für Flächeninhalt und Umfang gelten folgende Berechnungsformeln.

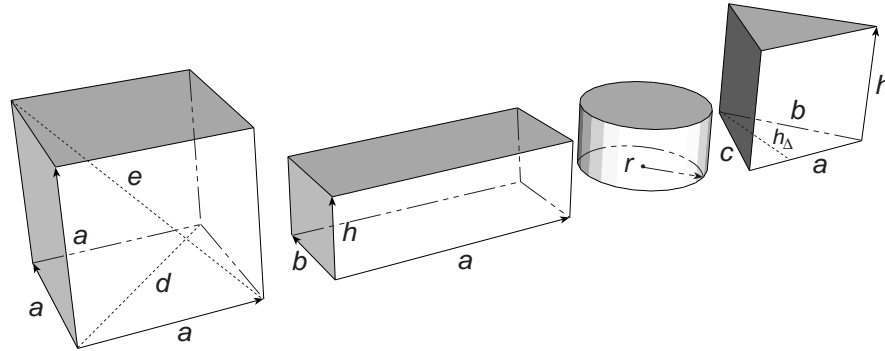
I.	Kreis	$A$	$=$	$r^2 \pi$
		$u$	$=$	$2r\pi$
II.	Kreissektor	$A_s$	$=$	$r^2 \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$
		$b$	$=$	$2r\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

Die Herleitung der Kreisflächenformel lässt sich zur Not auch bildlich vorstellen. Man unterteile einen Kreis in viele gleichmäßige Kreissektoren. Lässt man die Anzahl an Sektoren gegen unendlich streben, dann kann hier angenähert auch von Dreiecken gesprochen werden, da die jeweiligen Bogenstücke dem Attribut „gebogen“ nicht mehr wirklich gerecht werden. Nimmt man nun die Klinge und separiert die einzelnen Dreiecke, setzt sie dann zu einem Rechteck zusammen, dann gilt für die Grundseite  $a$  der halbe Kreisumfang, also  $r\pi$ , was noch mit der Seite  $b$ , dem Radius  $r$ , multipliziert werden muss.

<sup>8</sup>(lat.) *tangieren*: berühren, streifen

### 1.8.2 Stereometrie

Mit der Stereometrie wechselt unsere Betrachtung in die dritte Dimension und die Eigenschaften von geometrischen Körpern kommen ans Licht. Beginnen wir mit den einfacheren Körpern, den sog. *geraden* Körpern. Das sind Gebilde, wo alle Querschnitte parallel zur Grundfläche verlaufen und die Mantelflächen senkrecht auf ihr stehen.



Die Abb. zeigt die Gebilde *Würfel*, *Quader*, *Zylinder* und *Prisma*.

Wenn man einmal verstanden hat, wie sich Flächen berechnen lassen, dann sollte auch die Berechnung von Volumenkörpern keine große Schwierigkeit mehr darstellen. Um es kurz zu sagen: wollen wir wissen, wie viel Bier unsere quaderförmige Badewanne passt, dann muss offensichtlich die Grundfläche mit der Höhe multipliziert werden. Bei nicht mehr *geraden* Körpern werden solche Berechnungen schon viel aufwändiger.

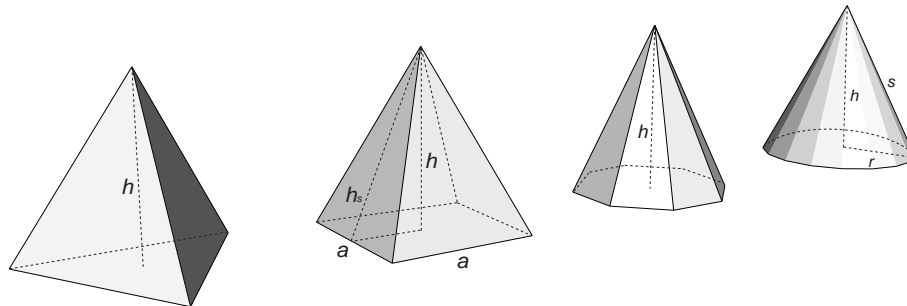
I.	Würfel	$A = 6a^2$	
		$V = a^3$	
		$d = a\sqrt{2}$	
		$e = a\sqrt{3}$	
II.	Quader	$A = 2(ab + ah + bh)$	
		$V = abh$	
		$d = \sqrt{a^2 + b^2}$	
		$e = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$	
III.	Zylinder	$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$	$\Leftrightarrow 2\pi r(h + r)$
		$V = \pi r^2 h$	
IV.	Prisma	$A = ah_{\Delta} + ah + bh + ch$	$\Leftrightarrow a(h + h_{\Delta}) + bh + ch$
		$V = \left(\frac{ah_{\Delta}}{2}\right) h$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ahh_{\Delta}$

Handelt es sich nicht mehr um *gerade* Körper, dann lässt sich noch unterscheiden zwischen *spitzen* und *stumpfen* Körpern sowie den Kugeln und den sog. Drehkörpern. Letztere sind besonders bei der additiven Modellierung<sup>9</sup> in der Computergrafik beliebt und haben hier, im Gegensatz zu gewissen Sci-Fi-Serien, keine religiöse Bedeutung. Sie beschreiben die Drehung einer beliebigen Fläche um eine Rotationsachse.

<sup>9</sup>Methode zur Erstellung von 3D-Objekten, den sog. *Meshes*, mit Programmen wie z.B. Cinema 4D<sup>®</sup>.



Neben den *geraden* Körpern lassen sich auch *spitze* Körper noch relativ leicht berechnen. Hier läuft die Grundfläche stets in einer Spitze aus, d.h. man nimmt ein reguläres  $n$ -Eck als Grundfläche, pflanzt im Mittelpunkt irgendeine Höhe und verbindet daraufhin alle Ecken mit ihr. Für  $n \rightarrow \infty$  hätten wir wieder einen Kreis als Grundfläche und ein reinblütiger Kegel sollte entstehen.



Die Abb. illustriert einige spitze Körper mit  $n$ -Ecken als Grundfläche.

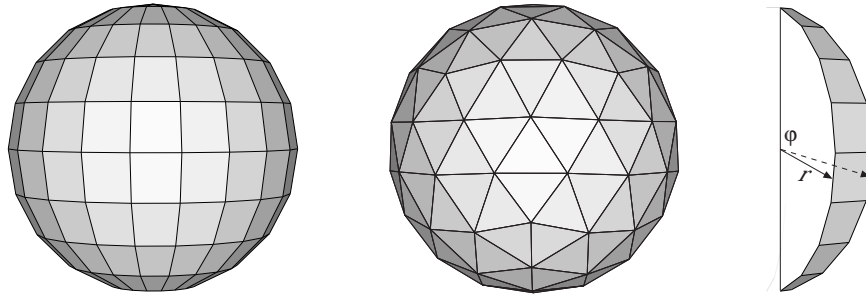
Was das Volumen betrifft, so stelle man sich vor, dass man einen beliebigen Quader stets in drei gleich große Pyramiden mit viereckiger Grundfläche zerlegen kann. Nun gut, diese Pyramiden haben ihre Höhe nun nicht mehr in der Mitte, sondern auf einen der Randpunkte sitzen. Was nun? Glücklicherweise kommt hier der hilfreiche Satz von Cavalieri<sup>10</sup> ins Spiel, der besagt, dass zwei Körper mit gleicher Grundfläche und Höhe sowie gleichen Parallelquerschnitten zur Grundfläche identische Volumina haben. Wir lernen also, dass bei einer festen Grundfläche eine senkrechte Höhe beliebig auf der Grundfläche verschoben werden kann – es entstehen zwar unterschiedliche Figuren, doch das Volumen ist stets dasselbe.

I.	Quadratische Pyramide	$h_s = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$
		$A_s = \frac{a \cdot h_s}{2}$
		$A = a^2 + 4A_s \Leftrightarrow a^2 + 2a\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$
		$V = \frac{a^2 h}{3}$
II.	Kegel	$s = \sqrt{h^2 + r^2}$
		$A = \pi r^2 + \pi r s \Leftrightarrow \pi r^2 + \pi r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$
		$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Soviel also zu den *spitzen* Körpern. Die *stumpfen* Körper will ich nicht auch noch extra durchkauen, da man sie mit den hier vermittelten Wissen leicht herleiten kann. Nur soviel: Ein *stumpfer* Körper ist nichts anderes als ein *spitzer* Körper ohne Spitze. Man denke an einen Würfelbecher oder eine Pyramide, bei der die Spitze durch einen Parallelschnitt zur Grundfläche weggeschnipelt wurde. Sind die Maße des korrespondierenden *spitzen* Körpers bekannt, dann ist die Volumen- oder Flächenberechnung schnell erledigt. Wenn nicht, dann greifen immerhin umständliche Formeln, die sich bei Bedarf in speziellen Büchern finden lassen.

<sup>10</sup> *Emilio del Cavalieri*, ital Mathematiker, 1598 - 1647

Eine **Kugel** entsteht, wenn ein Halbkreis um seinen Durchmesser gedreht wird. Und da sich ein Kreis als  $n$ -Eck mit unendlich vielen Ecken interpretieren lässt, kann man dieses Modell auch auf die Kugel übertragen. Warum erwähne ich das? Nun, ein Grund ist wohl die speicherintensive Darstellung einer „echten“ Kugel in der Computergrafik. Hier ist es generell die hohe Kunst, bei einem Minimum an Polygonen ein Maximum an Realitätsnähe herauszuholen. Ganz gleich, ob eine Kugel standardmäßig mit einem  $n$ -Eck als Basis oder durch Dreiecke, als sog. „Isokaeder-Typ“ generiert wird – ist die Anzahl an Segmenten zu niedrig, erscheint die Kugel unförmig und ist sie zu hoch, nimmt sie zu viel Speicher weg. Bei der ersten Abbildung existiert ein 20-Eck als Basis und man sieht durch die Helligkeitsunterschiede deutlich die Abstufungen. Bei keiner Beleuchtung kann dies mit geschickter Texturierung halbwegs kompensiert werden, ist aber eine Lichtquelle mit im Spiel, so wäre diese Kugeldarstellung eigentlich ungeeignet. Glücklicherweise sind viele Renderingprogramme zur Interpolation in der Lage<sup>11</sup>.



Die Abb. zeigt zwei generierte Kugeln, *Standard-* und *Isokaeder-Typ*, und einen sog. *Kugelkeil*.

Bei der Flächen- und Volumenberechnung gelten folgende Formeln, wobei ich die Herleitung der Kugeloberfläche an einem anschaulichen Beispiel durchexerzieren möchte.

$$\begin{aligned} \text{Kugel} \quad V_{\text{Kugel}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ A_{\text{Kugel}} &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

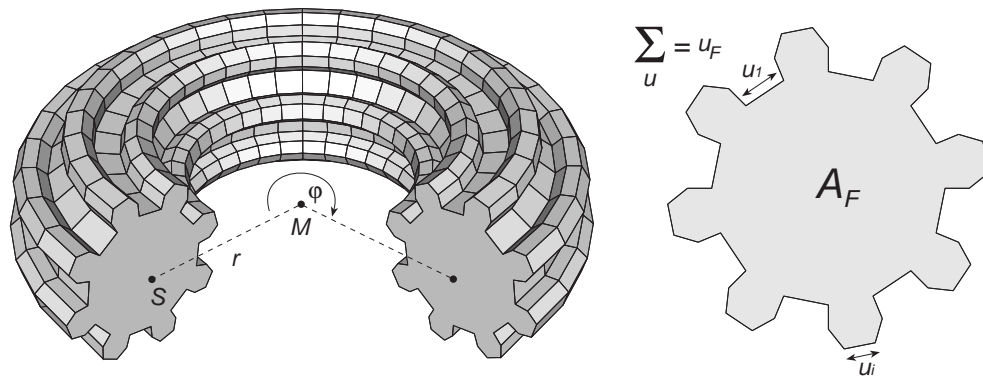
Man denke man sich die vielen Dreiecke beim Isokaeder als Pyramiden mit Kugelradius  $r$  als Höhe, wobei sich deren Spitzen alle im Mittelpunkt der Kugel vereinen. Für die Segmente  $n \rightarrow \infty$  existiert dann eine Legion an Pyramiden, deren summiertes Volumen dem Kugelvolumen und deren summierte Grundfläche der Kugeloberfläche entspricht. Mit dem Volumen für Pyramiden  $V_{P\Delta} = \frac{1}{3}Ah$  sowie  $h = r$  gilt dann:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{3}A_1 \cdot r + \frac{1}{3}A_2 \cdot r + \dots + \frac{1}{3}A_n \cdot r \\ &\Leftrightarrow \frac{r}{3} \underbrace{(A_1 + A_2 + \dots + A_n)}_{A_{\text{Kugel}}} \\ A_{\text{Kugel}} &= \frac{V_{\text{Kugel}} \cdot 3}{r} \\ &\Leftrightarrow \frac{4\pi r^3 \cdot 3}{3r} \\ &\Leftrightarrow 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Die dritte Abbildung zeigt einen sog. **Kugelkeil**, welcher sich berechnen lässt, indem man den *Keilwinkel*  $\varphi$  mit einbezieht. Dann gelten für Volumen und Fläche dieselben Formeln, die allerdings noch modifiziert werden, so dass für die Fläche die Formel  $A = 4\pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ}$  und fürs Volumen die Formel  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ}$  gilt.

<sup>11</sup>Stichwort „Gouraud-Shading“. Bei Interesse lese man entsprechende Literatur der Computergrafik.

Das letzte der hier behandelten Objekte ist ein sog. **Drehkörper**, der genau dadurch entsteht, indem man eine beliebige Fläche  $A_F$  um einen Winkel  $\varphi \leq 360^\circ$  um eine feste Drehachse rotieren lässt. Die folgende Abbildung soll ein Zahnrad mit acht Zähnen illustrieren, welches um  $270^\circ$  um eine feste Achse rotiert.



Die Abb. zeigt einen klassischen Rotationskörper.

Beim Modellieren lässt sich solch ein 3D-Objekt – ein Zahnrad, welches zur Wurst rotiert – mit wenigen Klicks generieren. Was die Volumenberechnung betrifft, so sollte diese mit den bislang vermittelten Grundlagen keine Hürde mehr darstellen. Erster Ansatz: wir formen die Wurst wieder gerade, dann brauchen wir nur noch die Höhe mit dem Umfang des Zahnrads zu multiplizieren. Zweite Wahl: wir nehmen den Abstand des Schwerpunktes  $S$  mit dem Mittelpunkt der Rotationsachse  $M$ , bezeichnen dies als Radius  $r$ , machen uns die *Guldinsche Regel*<sup>12</sup> zunutze, die besagt, dass der Rauminhalt gleich der bewegten Fläche multipliziert mit dem Weg ihres Schwerpunktes um die Drehachse ist, bauen den Drehwinkel  $\varphi$  mit ein und kommen so zum gleichen Ergebnis. Bei der Berechnung der Oberfläche nehmen wir diesmal nicht die Grundfläche  $A_F$ , sondern den Umfang  $u_F$  der Fläche und machen das gleiche Spiel nochmal. Ist der Drehwinkel kleiner als  $360^\circ$ , d.h. es entsteht kein geschlossenes Objekt, dann muss natürlich noch zwei Mal der Flächeninhalt  $A_F$  addiert werden.

$$V_{\text{Drehkp}} = A_F \cdot 2\pi r \cdot \frac{\varphi}{360^\circ}$$

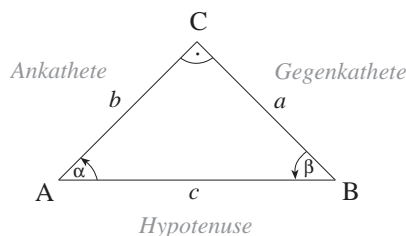
$$A_{\text{Drehkp}} = \begin{cases} \varphi = 360^\circ : & u_F \cdot 2\pi r \\ 0 < \varphi < 360^\circ : & u_F \cdot 2\pi r \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} + 2A_F \end{cases}$$

Bei weniger komplexen Rotationskörpern, die sich dadurch beschreiben lassen, dass eine zweidimensionale Kurve um eine beliebige Achse rotiert, kann man deren Volumen ebenso mit Hilfe der Integralrechnung berechnen. Voraussetzung ist allerdings, dass es sich bei der Kurve um eine stetige Funktion handelt, die sich auch integrieren lässt. Das klassische Beispiel wäre die halbe „umgekippte“ Normalparabel  $y = \sqrt{x}$ , die sich bei Rotation um die  $x$ -Achse, wenn man sie beispielsweise auf  $x \in [0, 4]$  beschränkt, in ein glockenähnliches Gebilde verwandelt. Auf solche Techniken zur Erzeugung von Volumen durch Rotation einer Funktion wird im Kapitel zur Integralrechnung detaillierter eingegangen. Bis hierhin erstmal genug.

<sup>12</sup>Paul Guldin, schweiz. Mathematiker, 1577 - 1643

### 1.8.3 Trigonometrie

Die Trigonometrie, die sich aus dem Griechischen mit „Dreiecksberechnung“ übersetzen lässt, betrachtet noch einmal genauer die Zusammenhänge der Winkelfunktionen am Dreieck. Begonnen wird mit den Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck.

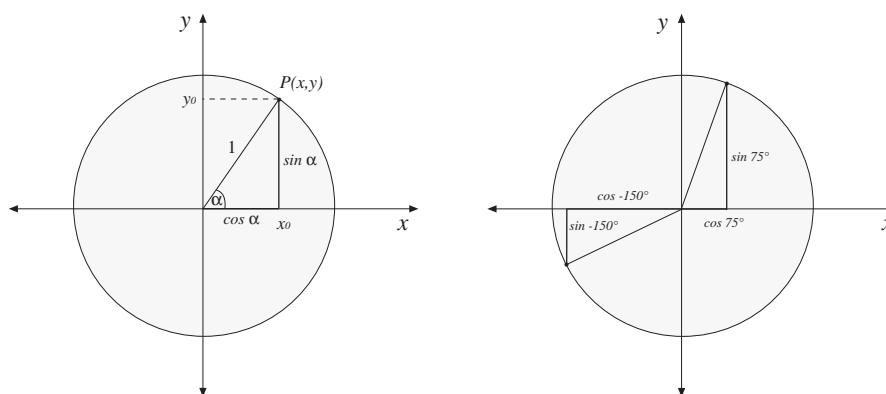


Die Abb. zeigt die Winkel und Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck.

Hier bezeichnet man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als *Hypotenuse*, die dem Winkel Alpha gegenüberliegende Seite als *Gegenkathete* und die am Winkel Alpha liegende Seite als *Ankathete*. Definiert sind Sinus & Co. zunächst für Winkel zwischen 0 und 90°. Für die Seitenverhältnisse gelten die folgenden Zusammenhänge.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \sin \alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin \frac{a}{c} \\ \text{II.} \quad \cos \alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos \frac{b}{c} \\ \text{III.} \quad \tan \alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Richten wir unser Augenmerk auf den Einheitskreis, der sich bekanntlich durch einen Radius der Längeneinheit Eins auszeichnet, dann ist zu beachten, dass hier der mathematisch *positive* Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn läuft und der *negative* Drehsinn als mit dem Uhrzeigersinn laufend definiert ist. Sollte man sich besser merken.



Die Abb. illustriert den Zusammenhang von Sinus und Kosinus am Einheitskreis.

Weiterhin sollte der Unterschied zwischen **Grad-** und **Bogenmaß** erwähnt werden. Das Gradmaß basiert auf dem Winkel  $\alpha$  zwischen dem Radius und der Abszisse, d.h. je nach Drehsinn von 0° bis  $\pm 180^\circ$ . Das Bogenmaß  $\chi$  hingegen bestimmt die Bogenlänge des am Winkel  $\alpha$  gegenüberliegenden Bogens, und ein voller Winkel entspricht  $\chi = 2\pi$ .

$$\alpha \rightarrow \chi : \quad \chi = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha \qquad \chi \rightarrow \alpha : \quad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \chi$$

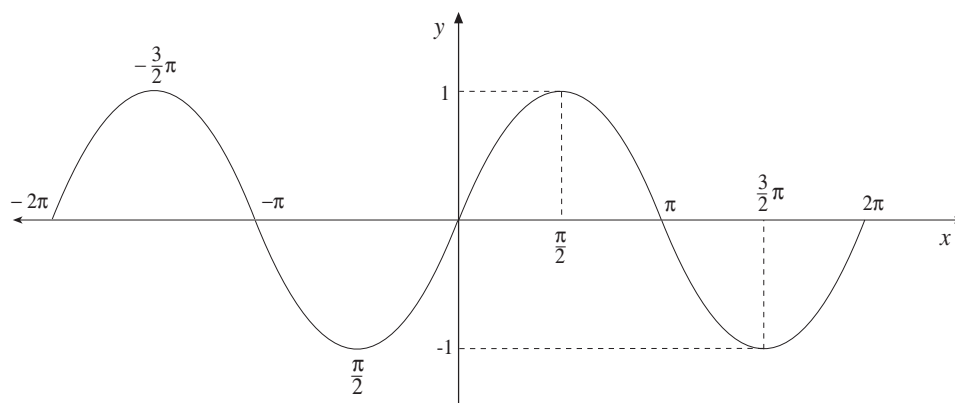
Nach dieser kleinen Vorrede sollte es so langsam dämmern, warum Sinus- und Kosinusfunktionen eine periodische Schwingung ergeben. Betrachtet man nämlich einen Punkt bzw. Tupel  $(x, y)$  auf dem Einheitskreis – welches durch Rotation des Zeigers  $r = 1$  entsteht – als Funktion von  $\alpha$ , dann würde für  $\alpha = 0^\circ$  die Strecke  $\sin \alpha = 0$  und für  $\cos \alpha = 1$  gelten. Bei  $\alpha = 90^\circ$  dann genau die umgekehrten Werte. Anders ausgedrückt: Im Einheitskreis entspricht  $\sin \alpha$  bei gegebenem Winkel  $\alpha$  dem Ordinatenwert des Punktes  $P(x_o)$ . Somit ist  $|\sin \alpha|$  bei einem Winkel von  $0^\circ$  gleich null und bei einem Winkel von  $\pm 90^\circ$  gleich eins. Da der Kosinus dem Abszissenwert  $x_o$  entspricht, haben wir ein dem Sinus entgegengesetztes Maximum  $\cos 0^\circ = 1$  und Minimum  $\cos 90^\circ = 0$ . Für besondere Funktionswerte existiert die nachfolgend erstellte Tabelle.

$\alpha$	0	30	45	60	90
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

Einer der guten Gründe, warum man dies alles beim Einheitskreis exerziert, ist der besondere Radius  $r = 1$ , der gleichzeitig auch der Länge der Hypotenuse beim eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck entspricht. Wir erinnern uns an die Definitionen von  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$ , womit dann im Dreieck des Einheitskreises folgendes gilt.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{P(x_o)}{1} = P(x_o) \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x_o}{1} = x_o$$

Exemplarisch betrachten wir nun die Sinusfunktion  $y = \sin x$ . Die Kosinusfunktion zeigt dieselbe Struktur, ist nur um  $\frac{\pi}{2}$  nach links verschoben, und wird nicht extra abgebildet. Für beide Funktionen gilt ein Definitionsbereich von  $-\infty < x < \infty$  und ein Wertebereich von  $-1 \leq y \leq 1$ . Aufgrund der Periode  $2\pi$  haben Sinus- und Kosinusfunktion unendlich viele Nullstellen, nämlich  $\lambda \cdot \pi$  und  $\frac{\pi}{2} + \lambda \cdot \pi$  für  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .



Die Abb. veranschaulicht die Sinusfunktion  $y = \sin x$ .

Für die ersten Schritte zur Trigonometrie sollte dieser Ausflug auch schon genügen. Auf die Feinheiten der Funktionen inkl. den Theoremen wird später im Analysis-Kapitel noch genauer eingegangen. Damit enden die trigonometrischen Grundlagen.

### 1.8.4 Euklidische Vektorrechnung

Die euklidische Vektorrechnung ist nicht nur in der Computergrafik so essentiell wichtig, dass hier eine erste Einführung des *euklidischen* Vektorraumres quasi geschehen muss. Mit dem euklidischen Raum ist vorläufig unser Anschauungsraum  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  gemeint, in dem man bekanntlich messen und rechnen kann. Höherdimensionale euklidische Räume wie  $\mathbb{R}^n$  und *allgemeine* Vektorräume sind später zentrales Thema der Linearen Algebra und werden dort genauer beschrieben.

⇒ „VEKTOREN? ... WAS MAG DAS SEIN?“

Vielleicht als Eröffnung ein paar Binsenweisheiten aus der Elementarphysik: dort gibt es bekanntlich etliche Größen, die durch die Angabe ihres *reellen* Wertes eindeutig bestimmt werden. Man denke an Größen wie Masse  $m$ , Zeit  $t$  oder auch die Temperatur  $T$ . All dies sind *dimensionslose* Größen<sup>13</sup>, da neben dem eigentlichen Wert die Wirkungsrichtung nicht existent ist. Auf der anderen Seite gibt es aber auch Größen, die explizit die Angabe einer Richtung erfordern, wie z.B. die Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , die Kraft  $\vec{F}$  oder die Beschleunigung  $\vec{a}$ . Macht Sinn, denn wenn z.B. die Wirkung einer fliegenden Faust im Raum beschrieben wird, so ist neben deren Betrag – die dahinter steckende Kraft – auch noch deren Richtung von Bedeutung. Bei Größen wie der *Zeit* wäre eine zusätzliche Dimensionsangabe eher ungewöhnlich. Man kann Vektoren allerdings auch nutzen, um eine gerichtete Strecke zwischen zwei Punkten im kartesischen Koordinatensystem zu beschreiben. Solche Vektoren können beliebig parallel verschoben werden, da ihre Richtung und ihr Betrag dadurch nicht verändert werden. Nun zur eigentlichen Definition.

- I. Ein Vektor  $\vec{a}$  ist eine Größe, die durch ihren Betrag  $|\vec{a}|$  und ihre Richtung eindeutig bestimmt ist.
- II. Ein Vektor ist ein Tupel  $a \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $n$  die Dimension des Vektors angibt. Jeder Vektor kann im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum sowohl als Punkt als auch als Richtung interpretiert werden.

Der allgemeine Begriff *Vektor* hat also nicht zwingend etwas mit Geometrie zu tun. Wenn also ein Tripel  $\in \mathbb{R}^3$  irgendwo erscheint, dann lässt sich dies z.B. als Punkt- oder Richtungsvektor im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem darstellen und interpretieren, obwohl primär vielleicht überhaupt keine geometrische Bedeutung vorliegt. Man denke an die Java-Klasse `Vector` als Container für Objekte, aus der ich eine Instanz mit zwei `float`-Elementen erzeuge und diese als Tupel  $\in \mathbb{R}^2$  betrachte. In diesem Abschnitt geht es aber nur um räumliche Vektoren, und es gilt Folgendes.

- Ein richtungsloser Vektor  $a$  vom Betrag null,  $|a| = 0$ , wird Nullvektor  $\vec{0}$  genannt.
- Jeder Vektor  $\vec{a}$  hat einen zugehörigen Einheitsvektor  $\vec{e}_a$ , der dieselbe Richtung wie  $\vec{a}$  hat und vom Betrag eins ist.<sup>14</sup>
- Vektoren, die vom Koordinatenursprung zu einem beliebigen Punkt im Koordinatensystem führen, nennt man *Ortsvektoren*.
- Stehen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht aufeinander, so spricht man von *orthogonalen* Vektoren. Sind sie zu ein und derselben Geraden parallel, so spricht man von *kollinearen* Vektoren.
- Der zum Vektor  $\vec{a}$  gehörende negative Vektor  $-\vec{a}$  ist vom Betrag her identisch mit  $\vec{a}$  und zeigt in die entgegengesetzte Richtung.

<sup>13</sup>Die oft auch als *Skalare* bezeichnet werden.

<sup>14</sup>Folglich lässt sich auch jeder Vektor  $\vec{a}$  in den Einheitsvektor  $\vec{e}_a$  transformieren.

### ⇒ VEKTOROPERATIONEN – ADDITION UND MULTIPLIKATION

Wie lassen sich Vektoren verknüpfen? Dies Mysterium wird gelüftet und los geht's mit der **Multiplikation** eines Vektors mit einem beliebigen reellen **Skalar**  $\lambda$ .

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ein neuer Vektor  $\vec{b}$  entsteht, der eine  $|\lambda|$ -fache Änderung des Betrags von  $\vec{a}$  darstellt, wobei die Richtung für  $\lambda > 0$  bestehen bleibt und sich für  $\lambda < 0$  umkehrt – der Vektor für  $\lambda > 1$  gestreckt und für  $0 < \lambda < 1$  gestaucht wird. Wichtige Eigenschaften wie Kommutativität & Co. folgen nun.

$$\text{I.} \quad \lambda \cdot a = a \cdot \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

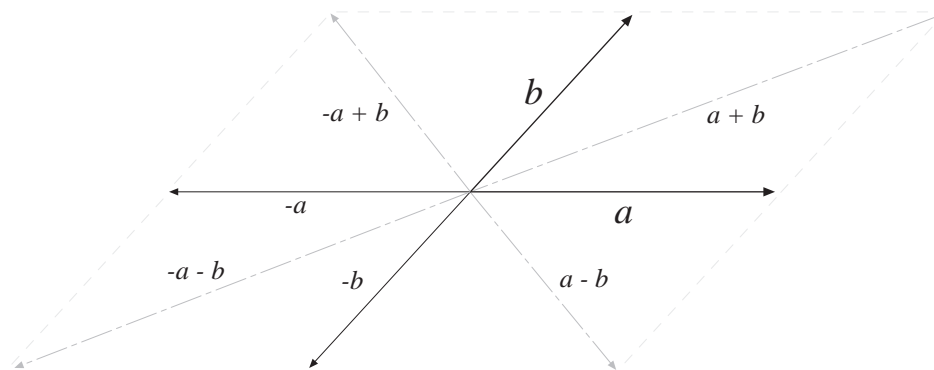
$$\text{II.} \quad \lambda(\mu \cdot a) = \mu(\lambda \cdot a) = \mu\lambda \cdot a \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{III.} \quad |\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a| \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Jeder Vektor  $\vec{a}$  lässt sich als Produkt seines Betrages mit dem dazugehörigen Einheitsvektor darstellen. Der Einheitsvektor zu  $\vec{a}$  hat stets dieselbe Richtung wie  $\vec{a}$ .

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a$$

Die **Addition** und **Subtraktion** von Vektoren ist nicht wirklich schwer. Nehmen wir zwei beliebige Vektoren im zweidimensionalen<sup>15</sup> Raum  $\vec{a}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , dann spannen diese stets ein Parallelogramm auf. Und da Vektoren komponentenweise addiert werden, ist die Summe der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  die gerichtete Diagonale im aufgespannten Parallelogramm. Bei der Subtraktion  $\vec{a} - \vec{b}$  gelten dieselben Gesetze wie bei den ganzen Zahlen,  $a - b = a + (-b)$ , d.h. man addiert zu  $\vec{a}$  den negativen Vektor von  $\vec{b}$  und erhält somit die gerichtete Diagonale von  $\vec{a}$  und  $-\vec{b}$  im aufgespannten Parallelogramm.



Die Abb. zeigt die additive Verknüpfung von Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ .

Die bekannten Verknüpfungsgesetze dürfen nicht fehlen, denn sie existieren natürlich auch bei der additiven Verknüpfung von Vektoren.

$$\text{Kommutativität} \quad a + b = b + a$$

$$\text{Assoziativität} \quad (a + b) + c = a(b + c)$$

$$\text{Distributivität} \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

<sup>15</sup>Die Addition gilt natürlich auch in höheren Dimensionen.

### ⇒ KOMONENTENDARSTELLUNG VON VEKTOREN

In  $\mathbb{R}^n$  lassen sich Vektoren auch komponentenweise darstellen. Dafür existieren zwei Notationen, nämlich die horizontale und vertikale Auflistung der einzelnen Komponenten. Betrachten wir dazu den Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  mit den Achsen  $x, y$  und  $z$ , dann notiert sich ein Vektor  $\vec{a}$  über seine jeweiligen Komponenten wie folgt.

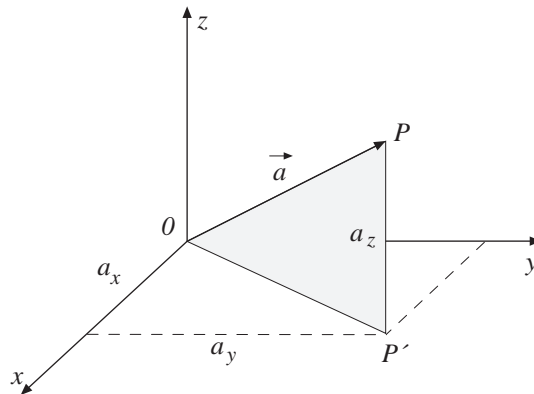
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Da die Einheitsvektoren  $e_x, e_y$  und  $e_z$  genau die Vektoren vom Betrag eins sind, die auf den jeweiligen Koordinatenachsen liegen, lässt sich jeder Vektor durch skalare Multiplikation ebenso über die Einheitsvektoren ausdrücken. Dies verdeutlicht auch nochmal die Multiplikation eines beliebigen Vektors  $\vec{a}$  mit einem reellen Skalar  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lambda_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} && \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### ⇒ DER BETRAG EINES VEKTORS

Der Betrag eines Vektors  $\vec{a}$  ist nichts anderes als die Länge des Ortsvektors zwischen dem Ursprung und den betrachteten Komponenten des Vektors.



Die Abb. zeigt die Herleitung des Betrags eines Vektors in  $\mathbb{R}^3$ .

In  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  lässt sich der Betrag eines Vektors geometrisch mit *Pythagoras* schnell herleiten. Für den Betrag  $|\vec{a}| = |\vec{OP}| \in \mathbb{R}^3$  sind einige Hilfsvektoren von Nöten.

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \vec{OP'} &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \text{ii.} \quad \vec{PP'} &= a_z \\ \text{iii.} \quad \left( |\vec{OP}| \right)^2 &= \left( \vec{OP'} \right)^2 + \left( \vec{PP'} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \text{iv.} \quad |\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \end{aligned}$$



## ⇒ VEKTOROPERATIONEN – DAS SKALARPRODUKT

Neben der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar lassen sich auch zwei Vektoren skalar verknüpfen. Das **Skalarprodukt** bildet zwei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  auf einen Skalar ab.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Daraus folgt direkt, dass bei einem Winkel von  $90^\circ$ , also bei *orthogonalen* Vektoren, das Skalarprodukt verschwindet. Der Winkel  $\varphi$  zwischen den Vektoren kann durch die Umformung der genannten Gleichung mit ein wenig Aufwand berechnet werden.

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

Das Skalarprodukt lässt sich auch direkt über die Vektorkomponenten berechnen, was sich beispielsweise immer dann anbietet, wenn der Winkel  $\varphi$  gar nicht bekannt ist.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z)$$

Das kann jetzt fleißig ausmultiplizieren werden, und durch die Tatsache, dass *verschiedene* Einheitsvektoren stets orthogonal sind, lassen sich viele Terme killen und man erhält nach mühsamer Schreiberei ein verblüffend einfaches Ergebnis.

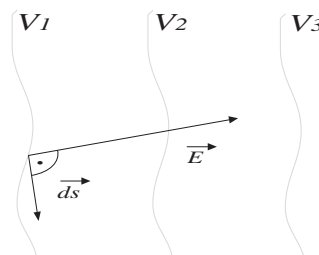
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x (\vec{e}_x \vec{e}_x) + a_x b_y (\vec{e}_x \vec{e}_y) + a_x b_z (\vec{e}_x \vec{e}_z) + \\ &\quad a_y b_x (\vec{e}_y \vec{e}_x) + a_y b_y (\vec{e}_y \vec{e}_y) + a_y b_z (\vec{e}_y \vec{e}_z) + \\ &\quad a_z b_x (\vec{e}_z \vec{e}_x) + a_z b_y (\vec{e}_z \vec{e}_y) + a_z b_z (\vec{e}_z \vec{e}_z) \\ &\Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

★ **Beispiel.** aus der Elektrotechnik.

Bewegt man sich von einem Punkt im elektrischen Feld des Potentials  $V$  *senkrecht* zur elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$ , so folgt daraus, dass alle Punkte dasselbe Potential  $V$  besitzen, da für das Potential  $V'$  im elektrischen Feld die folgende Formel gilt.

$$V' = V - \int_s \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Da der Wegvektor, wie hier angenommen, senkrecht zur Feldstärke steht, fällt das Produkt unter dem Integral weg, d.h.  $|\vec{E}| \cdot |\vec{ds}| \cdot \cos 90^\circ = 0$ , und entlang des Wegvektors  $\vec{ds}$  herrscht in der Tat dasselbe Potential – was durch Potentiallinien angedeutet wird.



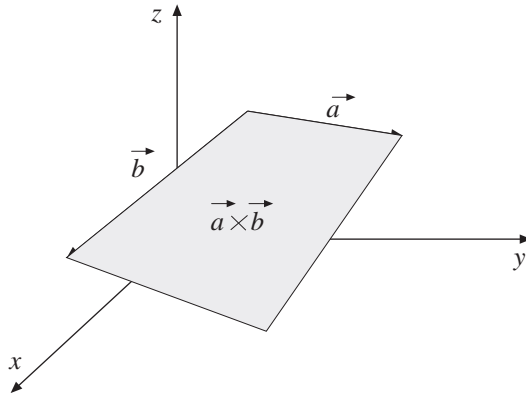
Die Abb. illustriert das Verschwinden des Skalarprodukts im elektrischen Feld.

### ⇒ VEKTOROPERATIONEN – VEKTORPRODUKT

Rekapitulieren wir: Durch das *Skalarprodukt* zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  erhält man stets einen *Skalar*. Nun gibt es aber auch noch das *kartesische Produkt* zweier Vektoren, welches zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  auf einen eindeutig bestimmten Vektor  $\vec{c}$  abbildet, daher es alternativ auch das **Vektorprodukt** zweier Vektoren genannt wird.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Kartesische Produkte haben immer etwas mit der Kombination von Mengen zu tun<sup>16</sup>. Denkt man sich nun zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  jeweils als die Menge aller Koordinatentripel mit infinitesimalem<sup>17</sup> Abstand, welche zwischen Vektoranfang und -ende liegen und den jeweiligen Vektor bilden, dann kann man sich das Vektorprodukt nun als Kombination dieser Koordinaten vorstellen. Diese geordneten Paare bilden geometrisch ein Parallelogramm, welches von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird.



Die Abb. zeigt die geometrische Anschauung des Vektorprodukts.

Nun ist das Vektorprodukt aber *nicht* gleich dem Parallelogramm – das kartesische Produkt als Menge aller geordneten Paare ist nur eine Hilfskonstruktion zur Veranschaulichung –, sondern eine Abbildung auf einen neuen Vektor  $\vec{c}$ , der eben genau denselben Betrag wie der Flächeninhalt des Parallelogramms hat. Und da der Flächeninhalt eines Parallelogramms sich über die Formel  $A = g \cdot h$  berechnen lässt, die Grundseite dem Betrag von  $\vec{a}$  respektive  $\vec{b}$  entspricht, und die Höhe nur über den Winkel zwischen den beiden Vektoren zu bekommen ist, gilt für den Betrag des neuen Vektors.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

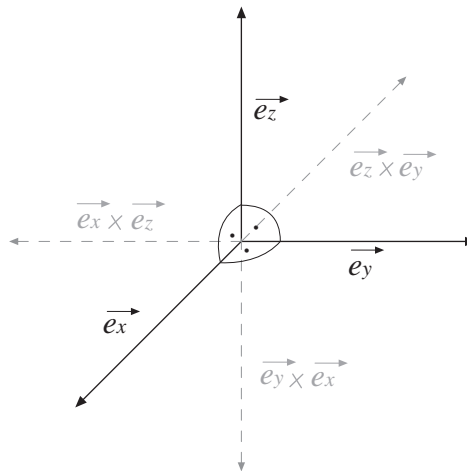
Wir kennen inzwischen den Betrag von  $\vec{c}$  aber dessen Lage noch nicht. Die kann man auch nicht irgendwie herleiten, denn das Vektorprodukt basiert nicht auf anderen Operationen, sondern wurde einfach als solches definiert. Es gilt daher Folgendes.

- Der Vektor  $\vec{c}$  ist orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , hat somit dieselben Startkoordinaten wie  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  und steht senkrecht zum aufgespannten Parallelogramm.
- Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, da  $\vec{b} \times \vec{a}$  zwar den Betrag von  $\vec{c}$  nicht ändert,  $\vec{c}$  aber in die entgegengesetzte Richtung zeigen lässt.
- Die Verknüpfung ist distributiv:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
- Für *kollineare* Vektoren gilt:  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

<sup>16</sup>Im Mengenkapitel erfolgt eine detailliertere Erklärung.

<sup>17</sup>(lat.) *infinitesimal*: ins unendlich Kleine gehend.

Um die Richtung des Vektorprodukts zu verdeutlichen, wenden wir die Operation bei den Einheitsvektoren an. Nehmen wir  $e_z \times e_y$ , dann entsteht ein neuer Vektor, der den Betrag des von  $e_z \times e_y$  aufgespannten Parallelogramms besitzt, also vom Betrag eins ist und sich in dieser Hinsicht nicht von den Einheitsvektoren unterscheidet. Er startet auch im Ursprung  $(0,0,0)$  und steht nun senkrecht auf dem aufgespannten Parallelogramm. Doch handelt es sich um  $e_x$  oder  $-e_x$ ? Hier greift z.B. die sog. *Schraubenregel*, die besagt, dass man eine Schraube aufs aufgespannte Parallelogramm setzt und in Richtung des zweiten Vektors – hier  $e_y$  – dreht. Und die daraus resultierende Schraubenbewegung bestimmt die Richtung von  $e_z \times e_y$ . In diesem Fall dreht man die Schraube rein, so dass der resultierende Vektor  $-e_x$  ist.



Die Abb. zeigt die kartesische Verknüpfung der Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^3$ .

Nach diesem Vorgeplänkel betrachten wir die für die Praxis wichtigere Berechnung des Vektorprodukts. Die Vektoren liegen explizit in der Koordinatenform vor und werden durch das Vektorprodukt verknüpft. Dann gilt folgende Herleitung. Man beachte stets, dass durch das Vektorprodukt *identische* Einheitsvektoren auf den Nullvektor abgebildet werden, nicht identische hingegen den ergänzenden Einheitsvektor kreieren<sup>18</sup>.

$$\begin{aligned}
 a \times b &= (a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z) \times (b_x e_x + b_y e_y + b_z e_z) \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{a_x b_x (e_x \times e_x)}_0 + \underbrace{a_x b_y (e_x \times e_y)}_{e_z} + \underbrace{a_x b_z (e_x \times e_z)}_{-e_y} + \\
 &\quad \underbrace{a_y b_x (e_y \times e_x)}_{-e_z} + \underbrace{a_y b_y (e_y \times e_y)}_0 + \underbrace{a_y b_z (e_y \times e_z)}_{e_x} + \\
 &\quad \underbrace{a_z b_x (e_z \times e_x)}_{e_y} + \underbrace{a_z b_y (e_z \times e_y)}_{-e_x} + \underbrace{a_z b_z (e_z \times e_z)}_0 \\
 a \times b &= (a_y b_z - a_z b_y) e_x + (a_z b_x - a_x b_z) e_y + (a_x b_y - a_y b_x) e_z
 \end{aligned}$$

Nach dieser Ausklammer- und Schreiborgie erhält man endlich die nötige Formel zur Berechnung von Vektorprodukten. Falls es noch nicht aufgefallen ist: Die kleinen Pfeilchen über den Vektoren, die besonders im technischen Bereich beliebt sind, haben nun ausgedient und werden hier künftig nicht weiter verwendet.

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

<sup>18</sup>Je nach Anordnung entweder positiv oder negativ.

## 2 Logik

Die Logik beschäftigt sich mit den Elementen des Denkens, d.h. den *Begriffen*, *Urteilen* und *Schlüssen*, sowie mit den Beziehungen zwischen ihnen. Eine *Aussage* ist eine sinnvolle Zusammenfassung von Begriffen, die einen Sachverhalt widerspiegelt und bei der es sinnvoll ist, die Frage nach dem Wahrheitswert zu stellen. Einer Aussage wird in der Logik entweder die Eigenschaft *wahr*, d.h. die Aussage ist gültig, oder die Eigenschaft *falsch*, d.h. die Aussage ist *nicht* gültig, zugeschrieben.

$w$  := Die Aussage ist wahr.

$f$  := Die Aussage ist falsch.

Eine mathematische Aussage ist somit stets eindeutig *wahr* oder *falsch*. Keine Aussagen wären „Mathematik ist doof“,  $40 + 2$  oder  $x = 12$ . Das Letztere ist dennoch eine *Aussageform*, die zu einer mathematischen Aussage wird, sobald  $x$  einen bestimmten Wert annimmt. Überprüfen wir zwei konstruierte Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt.

$A$  : $\Leftrightarrow$  „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“  $\Rightarrow w$

$B$  : $\Leftrightarrow$   $x^2 + 1 = 0$  ist im Reellen lösbar.  $\Rightarrow f$

### 2.1 Junktoren

- I. Logische Aussagen werden in der Logik mit sog. *Junktoren*<sup>19</sup> verknüpft. Dabei handelt es sich folglich um Operationen, die auf logischen Aussagen angewandt werden können. Die **Negation** „ $\neg$ “ ordnet jeder Aussage ihre verneinte Aussage zu. Sie ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist und genau dann falsch, wenn die Aussage wahr ist.

$A$  : $\Leftrightarrow$  20 ist teilbar durch 2

$\neg A$  : $\Leftrightarrow$  20 ist *nicht* teilbar durch 2

- II. Die **Disjunktion** „ $\vee$ “ verknüpft zwei Aussagen durch das nicht ausschließende „Oder“. Die Disjunktion zweier Aussagen ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist und nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

$A$  : $\Leftrightarrow$   $x > 3$

$B$  : $\Leftrightarrow$   $x < 1$

$A \vee B$  =  $x > 3 \vee x < 1$

- III. Die **Konjunktion** „ $\wedge$ “ verknüpft zwei Aussagen durch das „Und“ im Sinne von „sowohl ... als auch“. Die Konjunktion zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind – ansonsten ist sie stets falsch.

$A$  : $\Leftrightarrow$   $x$  ist eine gerade Zahl.

$B$  : $\Leftrightarrow$   $x$  ist teilbar durch 3.

$A \wedge B$  =  $x$  ist gerade *und* teilbar durch 3.

---

<sup>19</sup>(lat.) *Junktor*: verbindendes Partikel

- IV. Die **Implikation** „ $\Rightarrow$ “ beinhaltet, dass wenn  $A$  gilt, konsequenterweise auch  $B$  gelten muss. Die Implikation zweier Aussagen ist somit genau dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr und die Folgerung falsch ist<sup>20</sup> – andernfalls ist sie stets wahr, denn aus einer falschen Aussage kann quasi „alles“ gefolgert werden. Nun sollen die wichtigen Bezeichner *hinreichend* und *notwendig* erklärt werden.  $A \Rightarrow B$  bedeutet, dass  $A$  *hinreichend*, aber *nicht notwendig* für  $B$  ist. Umgekehrt bedeutet  $B \Rightarrow A$ , dass  $A$  *notwendig*, aber *nicht hinreichend* für  $B$  ist.

$A \quad :\Leftrightarrow \quad$  „Es regnet seit fünf Minuten.“

$B \quad :\Leftrightarrow \quad$  „Die Straße ist nass.“

Einfach mal angenommen, die Straße sei nicht überdacht, dann ist die Aussage  $A \Rightarrow B$  wahr. Allerdings gilt nicht der Umkehrschluß  $B \Rightarrow A$ , denn die Tatsache, dass die Straße nass ist, bedeutet noch lange nicht, dass es tatsächlich geregnet hat – vielleicht ist auch nur irgendwo ein Rohr geplatzt. Ein anderes prägnantes Beispiel wären zwei Aussagen über eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ .

$A \quad :\Leftrightarrow \quad n < 13$

$B \quad :\Leftrightarrow \quad n < 9$

Eine Aussage  $C$  soll nun so konstruiert werden, dass sie *hinreichend* für  $A$  und *notwendig* für  $B$  ist. Betrachtet man zwei Aussagen als Menge, so gilt die Äquivalenz nur dann, wenn beide Mengen gleich sind. Sind sie es nicht und die eine Menge ist Teilmenge der anderen Menge, dann ist die Obermenge für die Teilmenge *notwendig* und die Teilmenge ist *hinreichend* für die Obermenge. Darum wäre eine *mögliche* Lösung die folgende Aussage, denn dann gilt  $C \Rightarrow A$  und  $B \Rightarrow C$ .

$C \quad = \quad n < 10$

- V. Die **Äquivalenz** verknüpft zwei Aussagen durch „genau dann, wenn“ resp. „dann und nur dann“. Die Äquivalenz ist eine Implikation in beide Richtungen, d.h. sie ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr oder falsch sind.

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$$

$A$  ist somit *hinreichend und notwendig* für  $B$  und umgekehrt. Nehmen wir als Beispiel einen funktionierenden Cola-Automaten der Firma „Pepsi“.

$A \quad :\Leftrightarrow \quad$  „Euro wird eingeworfen.“

$B \quad :\Leftrightarrow \quad$  „Cola wird ausgespuckt.“

Hier gilt stets  $A \Leftrightarrow B$ , denn bei anderen Ereignissen wäre der Automat defekt und die Äquivalenzbeziehung würde auch nicht mehr gelten. Logisch, nicht wahr?

- VI. Das in der Digitaltechnik häufig benutzte **exklusive Oder** „ $A$  xor  $B$ “ verknüpft zwei Aussagen durch ein ausschließendes „Oder“, d.h. die Aussage ist nur dann wahr, wenn eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.

$$A \text{ xor } B \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

<sup>20</sup>Voraussetzung und Folgerung werden oft auch als *Prämisse* und *Konklusion* bezeichnet.

## 2.2 Quantoren

Das Symbol „ $\exists$ “ bildet den sog. **Existenzquantor**. Sei  $A(x)$  eine beliebige Aussageform mit der Grundmenge  $G$  und der Lösungsmenge  $L \subseteq G$ . Dann steht  $\exists x A(x)$  für die Aussage, dass mindestens ein  $x \in G$  existiert, für welches  $A(x)$  wahr ist.

Das Symbol „ $\forall$ “ bildet den sog. **Allquantor**. Somit steht  $\forall x A(x)$  für die Aussage, dass  $A(x)$  für alle  $x \in G$  wahr ist. Da unser alltäglicher Sprachgebrauch nur selten den Anforderungen der Logik entspricht, gilt folgendes zu beachten: Die Verneinung einer Aussage wie „alle Sozis sind rot“ wäre in der Logik nicht etwa „alle Sozis sind nicht rot“ – oder noch einen Tick absurder „alle Sozis sind schwarz“ –, sondern korrekt wäre die Verneinung „es existiert ein Sozi, der nicht rot ist“.

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

## 2.3 Wahrheitstabeln

Zur Herleitung des Wahrheitsgehalts verschachtelter Ausdrücke empfiehlt es sich, eine der sog. Wahrheitstabeln aufzustellen. In denen werden alle notwendigen Kombinationen der einzelnen Aussagen aufgestellt, so dass sich der Wahrheitsgehalt einer Aussage leicht überprüfen lässt. Die folgende Tafel gilt für die Standardoperationen.

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
$f$	$f$	$w$	$w$	$f$	$f$	$w$	$w$	$w$
$f$	$w$	$w$	$f$	$w$	$f$	$w$	$f$	$f$
$w$	$f$	$f$	$w$	$w$	$f$	$f$	$w$	$f$
$w$	$w$	$f$	$f$	$w$	$w$	$w$	$w$	$w$

Für die Berechnung einfacher Ausdrücke ist eine Wahrheitstafel eher ungeeignet, da sich die Ergebnisse im Kopf viel schneller herleiten lassen. Bei komplexer verschachtelten Ausdrücken wäre es allerdings fatal, den Ausdruck im Kopf zu erraten – es sei denn, man ist ein „Logik-Genie“ –, denn die Anfälligkeit für Fehler ist hier besonders hoch. Die nachfolgende Tafel behandelt solch einen Fall.

$A$	$B$	$C$	$\neg C$	$(B \wedge \neg C)$	$[A \vee (B \wedge \neg C)]$	$\neg[A \vee (B \wedge \neg C)] \wedge A$
$f$	$f$	$f$	$w$	$f$	$f$	$f$
$f$	$f$	$w$	$f$	$f$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$	$w$	$w$	$w$	$f$
$f$	$w$	$w$	$f$	$f$	$f$	$f$
$w$	$f$	$f$	$w$	$f$	$w$	$f$
$w$	$f$	$w$	$f$	$f$	$w$	$f$
$w$	$w$	$f$	$w$	$w$	$w$	$f$
$w$	$w$	$w$	$f$	$f$	$w$	$f$

Der letzte Ausdruck ist stets *falsch*, ganz gleich, welche logischen Werte  $A$ ,  $B$  und  $C$  auch immer annehmen mögen. Doch erkennt man dies auf Anhieb und ohne Hilfe von Tafeln? ... In diesem Fall schon, denn wenn in einem Ausdruck in irgendeiner Form  $A \wedge \neg A$  auftritt, dann kann er natürlich *niemals* wahr werden.

## 2.4 De Morgansche Regeln

De Morgans<sup>21</sup> Regeln vereinfachen verschachtelte Verknüpfungen und helfen bei der Auflösung von geklammerten Ausdrücken. Nachfolgend seien die beiden De Morganschen Regeln sowie die Distributivgesetze für Konjunktion und Disjunktion angeführt.

- i.  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- ii.  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- iii.  $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$
- iv.  $[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$

Der Nachweis der De Morganschen Regeln erfolgt wieder über die Wahrheitstafeln. Exemplarisch soll die erste der Regeln nachgewiesen werden – bei allen anderen würde analog nach demselben Schema verfahren werden.

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
$f$	$f$	$w$	$w$	$f$	$w$	$w$
$f$	$w$	$w$	$f$	$f$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$	$w$	$f$	$w$	$w$
$w$	$w$	$f$	$f$	$w$	$f$	$f$

Wie man erkennt, sind die Werte der geforderten Ausdrücke äquivalent, so dass damit die Allgemeingültigkeit der ersten De Morganschen Regel nachgewiesen wurde.

## 2.5 Allgemeingültige Ausdrücke der Logik

Neben den Regeln von De Morgan lassen sich noch allerhand andere mehr oder minder triviale allgemeingültige Ausdrücke konstruieren. Einige wurden sogar mit einem eigenen Bezeichner versehen und sollen nun genannt werden. Generell dienen sie dazu, das Rechnen mit logischen Aussagen, was zum Großteil auf die Errungenschaften von Boole<sup>22</sup> zurückzuführen ist, zu vereinfachen.

- „Ausgeschlossener Dritter“  $A \vee \neg A$
- „Widerspruch“  $\neg(A \wedge \neg A)$
- „Doppelte Verneinung“  $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- „Kontraposition“  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- „Modus ponens“  $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
- „Modus tollens“  $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

Anwendung findet das Rechnen mit logischen Ausdrücken vermehrt in den Programmiersprachen – in **Java** existiert z.B. der elementare Datentyp `boolean`, in **C#** einfach `bool` genannt –, der einer Variablen den Wert „**true**“ oder „**false**“ zuweist. In der Digitaltechnik wird mit „1“ statt wahr und „0“ statt falsch gearbeitet.

<sup>21</sup> *Augustus De Morgan*, engl. Mathematiker und Logiker, 1806 - 1871

<sup>22</sup> *George Boole*, engl. Mathematiker und Logiker, 1815 - 1864.

## 2.6 Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik erweitert die Aussagenlogik um Prädikate, so dass eine Eigenschaft auf eine beliebige Menge von Objekten definiert werden kann und man nicht allen Objekten die betreffende Aussage einzeln zuordnen muss. Sie soll hier aber nur peripher behandelt werden – für eine ausführliche Beschreibung wird auf entsprechende Fachliteratur verwiesen. Soll also eine Elementaraussage á la „die Deutschen sind starrsinnig“ für verschiedene Objekte einer Menge formuliert werden, so wählt man zuerst einen Repräsentanten für diese Menge – analog, wie z.B.  $n$  eine beliebige Zahl  $\in \mathbb{N}$  repräsentiert – und definiert dann ein  $n$ -stelliges Prädikat. Dabei handelt es sich um eine Eigenschaft, die zwischen den Objekten korreliert. Bei unserem Beispiel könnte man  $d$  für einen Deutschen aus der Menge der Deutschen  $D$  wählen. Das 1-stellige Prädikat, da es keine Beziehung untereinander ist, würde mit der Variablen  $d$  als prädikatenlogischer Ausdruck zu „starrsinnig( $d$ )“ verschmelzen. Soll nun ausgedrückt werden, dass mindestens ein Deutscher starrsinnig ist, so könnte man dies wie folgt notieren.

$$\forall d \in D \exists d : \text{starrsinnig}(d)$$

Betrachten wir 2-stellige Prädikate, dann wird die Beziehung, die zwischen zwei Individuen einer Menge besteht, selbstverständlich mit einbezogen. Als Beispiel sei die Menge aller Kloreiniger  $K$  und die Menge aller Toiletten  $T$  genannt. Zwischen denen lässt sich nun eine mehr oder minder geruchsneutrale Beziehung konstruieren.

$$\forall k \in K \exists t \in T : \text{machtlos}(k, t)$$

Für alle Kloreiniger existiert somit ein Klosett, wo jeder Reinigungsversuch erfolglos bleibt. Wer einmal in Italien eine Raststätte besucht hat, der wird dies wohl bestätigen können. Dieselbe Aussage kann man natürlich auch umgekehrt konstruieren. Man beachte dabei die Reihenfolge der Tupel in der Relation.

$$\exists t \in T \forall k \in K : \text{resistent}(t, k)$$

Als letztes Beispiel soll ein prädikatenlogischer Ausdruck aus einem Satz der Alltagssprache kreiert werden, der sich auch der Symbolik der Aussagenlogik bedient: „Alle Wehrpflichtige des Geburtsjahrgangs zwischen 1975 und 1980 werden nicht einberufen.“

$$\forall x \in \{w \in W \mid \exists j \in \mathbb{N} : \text{Jahrgang}(w, j) \wedge (1975 \leq j \leq 1980)\} : \neg \text{einberufen}(x)$$

Wenn man sehr pingelig ist, dann muss zuvor selbstverständlich jede Menge genau deklariert werden. Ich denke aber, dass aus dem Kontext hier klar wird, dass mit  $W$  die Menge der Wehrpflichtigen und mit  $J = \mathbb{N}$  die Jahrgänge gemeint sind.

## 2.7 Beweismethoden

Eine Anwendung der Logik in der Mathematik ist das Beweisen von Behauptungen. Hier bedient man sich der *Implikation*, d.h. man zeigt, dass wenn eine Voraussetzung  $A$  gilt, auch die Behauptung  $B$  gelten muss. Der Schlüssel ist die Tatsache, dass aus einer wahren Prämisse nur eine wahre Konklusion gefolgert werden kann. Ist somit der Wahrheitsgehalt einer Voraussetzung bekannt – also *wahr* –, so kann durch die Implikation gezeigt werden, dass die Behauptung  $B$  ebenfalls *wahr* ist. Unterschieden wird zwischen *direkten* und *indirekten* Beweisen.



### 2.7.1 Direkter Beweis

Beim direkten Beweis bedient man sich meist der Äquivalenzbeziehung,  $A \Leftrightarrow B$ , und beweist die behauptete Aussage durch die Überprüfung der Implikationen in beide Richtungen, d.h.  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$ . Zu diesem Zweck wendet man bekannte Rechenregeln und Äquivalenzumformungen an und gelangt so Schritt für Schritt zum erhofften Beweis. Eine Implikation wie  $A \Rightarrow B$  kann ebenso durch die Überprüfung der äquivalenten Beziehung  $\neg B \Rightarrow \neg A$  bewiesen werden. Dazu ein Beispiel.

✕ *Beweis.*

Die folgende Aussage, deren Wahrheitsgehalt nicht sofort zu erkennen ist, wird einfach umgeformt, so dass man deren Allgemeingültigkeit sofort erkennt.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 : (x+5)^2 - (x-5)^2 \geq 19x$$

Die Klammern werden nach der binomischen Formel aufgelöst und man staunt schon fast über die Trivialität dieses Beweises. Erste Beweisführung zum Eingewöhnen.

$$\begin{aligned} (x+5)^2 - (x-5)^2 \geq 19x &\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 - (x^2 - 10x + 25) \geq 19x \\ &\Leftrightarrow 20x \geq 19x \end{aligned}$$

□

### 2.7.2 Indirekter Beweis

Der Beweis eines Satzes  $A \Rightarrow B$  kann auch *indirekt* geführt werden – ein sog. *Widerspruchsbeweis*. Man beweist die Wahrheit einer Aussage  $A$ , indem man von der Annahme ausgeht, die Aussage  $A$  wäre falsch und somit  $\neg A$  richtig. Gelangt man nun im Laufe des Prozesses zu einer eindeutig falschen Aussage – aus einer wahren Prämisse kann keine falsche Konklusion gefolgert werden –, so muss die Aussage  $\neg A$  falsch sein und es gilt  $\neg(\neg A)$ . Folglich ist die ursprüngliche Aussage  $A$  aber doch richtig. Der Klassiker beim indirekten Beweis ist zu widerlegen, dass  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  gilt und deshalb  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist. Da dieser Beweis aber in vielen einschlägigen Büchern zu finden ist, soll er hier nicht auch noch lauwarm aufgetischt werden.

✕ *Beweis.*

Wir konstruieren uns eine Ungleichung, die zuerst verneint wird und wir, wenn es glatt läuft, durch gezieltes Umformen auf einen Widerspruch stoßen.

$$\begin{aligned} A(x) &:\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \neg A(x) &:\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\sqrt[3]{27}}}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \frac{(27^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{27^{\frac{1}{6}}}{4^{\frac{1}{6}}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \sqrt[6]{27} \leq \sqrt[6]{4} \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist natürlich falsch, denn die gleiche Wurzel aus einer größeren positiven Zahl größer eins ist nicht kleiner oder gleich der Wurzel einer kleineren Zahl. Die falsche Aussage ist somit falsch und unser kleiner Beweis hingegen perfekt.

□

## 3 Mengen

### 3.1 Naive Mengenlehre

Auch wenn die klassische Mengenlehre noch relativ jung ist, so ist der Mengenbegriff in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung. Er dient dazu, Elemente zu einer neuen Einheit zusammenzufassen, um diese daraufhin zu analysieren und zu nutzen.

*„Unter einer Menge versteht man die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens mit gemeinsamen Eigenschaften zu einer Gesamtheit.“*

Cantorscher Mengenbegriff

Diese von Cantor<sup>23</sup> wohlweislich definierte Bestimmung des Mengenbegriffs reicht für unsere Arbeit völlig aus, doch so schön sie auch klingen mag, sie hat leider einen erheblichen Makel. Betrachten wir dazu ein bekanntes Paradoxon:

*„Der Koch bekocht genau diejenigen, die sich nicht selber bekochen.“*

Ein seltsamer Satz, doch was sagt er aus? Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten: der Koch zählt zu jenen, die sich nicht selber bekochen und bekocht sich somit laut Definition selbst. Ein Widerspruch, zweifelsfrei. Zweite Möglichkeit: der Koch bekocht sich selber. Da er aber genau diejenigen bekocht, die sich nicht selber bekochen, folgt auch hier ein Widerspruch! ... Genug verkocht, besser wir abstrahieren das Problem einfach – es geht natürlich um die Mengen  $M$ , die sich nicht selber enthalten.

$$M := \{A \mid A \notin A\}$$

Die Frage ist, ob  $M \in M$  gilt und die Menge sich selber enthält. Offensichtlich ist dieses Problem, welches auch als *Russellsche*<sup>24</sup> *Antinomie* bezeichnet wird, nicht wirklich lösbar. Da stets eindeutig geklärt sein sollte, ob ein Element in einer Menge enthalten ist oder nicht, gilt die Definition nach Cantor inzwischen als überholt – Abhilfe schafft in der modernen Mathematik ein axiomatisches System, welches Antinomien<sup>25</sup> vermeidet. Doch damit kommt man als Informatiker i.d.R. nicht in Berührung.

#### ❖ NOTATION VON MENGEN

Generell notiert man eine Menge  $M$  in der auflistenden Darstellung. Man benennt eine Menge mit einem Statthalter und rahmt deren Elemente in einer geschweiften Klammer ein.

$$M = \{ \dots \}$$

Durch die Klammern werden die *wohlunterschiedenen Elemente* zu einer Einheit zusammengefasst. Durch die Unterscheidbarkeit ist folglich die Einmaligkeit eines Elements garantiert<sup>26</sup>. Ist ein Objekt  $a$  Element der Menge  $M$ , so schreibt man  $a \in M$ . Wenn nicht, dann drückt man dies durch  $a \notin M$  aus. Unterschieden wird zwischen der *aufzählenden* und der *beschreibenden* Darstellung. Die aufzählende Schreibweise gibt Elemente explizit an, was sich eigentlich nur bei sehr kleinen Mengen empfiehlt, und die beschreibende Darstellung definiert eine Menge über deren Eigenschaft. Das ergibt durchaus Sinn, denn wenn z.B. eine Menge mit 41 Elementen notiert werden soll, dann macht die Auflistung nur bei bunt durcheinander gewürfelte Mengen Sinn – ist aber eine gemeinsame Eigenschaft bekannt, so wählt man die beschreibende Darstellung.

<sup>23</sup> Georg Cantor, Begründer der klassischen Mengenlehre, 1845-1918

<sup>24</sup> Bertrand Russel, engl. Logiker und Philosoph, 1872-1970

<sup>25</sup> Antinomie – Widerspruch innerhalb eines Satzes.

<sup>26</sup> In einem späteren Kapitel wird eine Ausnahme betrachtet, die sog. *Multimengen* der Informatik.

Einige Beispiele, die mögliche Mengen und deren Notation illustrieren sollen. Man verabschiede sich bitte von der Vorstellung, dass Mengen nur Zahlen beinhalten dürfen.

$$\begin{aligned}
 A &= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \dots\dots\dots \text{„Die unendliche Menge der Primzahlen“} \\
 B &= \{1, 2, \dots, 100\} \dots\dots\dots \text{„Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 100“} \\
 C &= \{\text{Adam, Eva}\} \dots\dots\dots \text{„Die Menge der ersten Menschen“} \\
 D &= \{s \mid s \text{ studiert Medieninformatik}\} \dots\dots\dots \text{„Menge der MI-Studis“} \\
 E &= \{(x, y) \mid x \in \{41, 42\}, y \in \{a, b, c\}\} \dots\dots\dots \text{„Menge geordneter Paare“} \\
 F &= \{\emptyset\} \dots\dots\dots \text{„Menge ohne Elemente, sog. leere Menge“} \\
 G &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} \dots\dots\dots \text{„Ebenso eine leere Menge“}
 \end{aligned}$$

Eine Menge heißt *endlich*, falls sie nur endlich viele Elemente hat, ansonsten nennt man sie folgerichtig *unendlich*. Zwei Mengen  $M_1$  und  $M_2$  heißen gleich,  $M_1 = M_2$ , wenn jedes Element der Menge  $M_1$  auch Element der Menge  $M_2$  ist und umgekehrt. Die folgenden zwei Mengen sind beispielsweise gleich.

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x+2)(x+3) = 0\} \\
 M_2 &= \{-1, -2, -3\}
 \end{aligned}$$

Die **Mächtigkeit** einer Menge bildet deren Anzahl an Elementen auf eine natürliche Zahl ab. Sie wird daher mit Betragstrichen  $|M|$  notiert. Einige Beispiele:

$$\begin{aligned}
 X = \{-3, 1, 7, 100\} &\Rightarrow |X| = 4 \\
 Y = \{2, 4, 6, 8, \dots, 20\} &\Rightarrow |Y| = 10 \\
 Z = \{z \mid z \text{ sei wahrheitsgetreuer Politiker.}\} &\Rightarrow |Z| = 0 \\
 \mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} &\Rightarrow |\mathbb{N}| = \infty
 \end{aligned}$$

#### ❖ TEILMENGEN

Eine Menge  $A$  heißt **Teilmenge** einer Menge  $B$ ,  $A \subseteq B$ , wenn jedes Element der Menge  $A$  auch Element von  $B$  ist. Die *leere* Menge  $\emptyset$  enthält keine Elemente: sie ist aber stets Teilmenge einer jeden Menge, spielt bei der Mächtigkeit aber keine Rolle. Eine **echte Teilmenge**,  $A \subset B$ , kann auch die Verschiedenheit der Mengen implizieren.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B \wedge A \neq B$$

Diese penible Differenzierung zur „echten“ Teilmenge ist aber – man verzeihe den unwissenschaftlichen Ausdruck – reine Ansichtssache und soll in diesem Skript nicht wirklich zur Anwendung kommen. Teilmengen werden hier generell je nach Kontext mit  $\subset$  oder  $\subseteq$  notiert. Das Erwähnte noch einmal in formaler Form.

#### ⊗ Korollar.

- i.  $\forall M : \emptyset \in M$
- ii.  $\forall M : M \subset M$
- iii.  $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$
- iv.  $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

## ❖ DIE POTENZMENGE

Wenn alle Teilmengen einer Menge  $M$  auf eine neue Menge  $\mathcal{P}(M)$  abgebildet werden, dann spricht man von der **Potenzmenge**. Und mit „alle“ sind in der Tat alle nur möglichen Teilmengen gemeint, d.h.  $\mathcal{P}(M)$  beinhaltet somit alle Teilmengen von  $M$ . Nehmen wir als Beispiel die symptomatischen Dualzahlen der Informatik.

$$D = \{0, 1\}$$

Gesucht ist  $\mathcal{P}(D)$  und, o Wunder, die Abbildung trägt deutlich mehr Elemente. Denn dazu zählt neben der leeren Menge natürlich auch  $D$  als Teilmenge von sich selber.

$$\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, 0, 1, \{0, 1\}\}$$

Für eine beliebige Menge  $M$  mit  $n$  Elementen lässt sich der Betrag der Potenzmenge durch  $2^n$  ausrechnen. Und diese Formel wird nun bewiesen.

✕ *Beweis.* durch vollständige Induktion.

I.

Für  $n = 1$  hätte eine Menge  $M$  zwei Elemente, die leere Menge und das eine Element. Somit würde  $|\mathcal{P}(M)| = 2^1$  korrekt die Anzahl an Elementen in der Potenzmenge wiedergeben. Der Induktionsbeginn funktioniert selbstredend auch für  $n = 0$ , dann hätten wir nur die leere Menge als einziges Element.

II.

Hier muss gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung  $|M| = n$  für ein weiteres Element  $n$ , also  $|M| = n+1$ , die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M) = 2^{n+1}$  Elemente trägt. Dafür wende ich einen kleinen Trick an, denn ich konstruiere aus  $M$  einfach eine zweite Menge  $Q$ , die ich wie folgt definiere:

$$\text{Sei } a \in M, \text{ dann ist } Q := M \setminus \{a\}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung würde  $|\mathcal{P}(Q)| = 2^n$  natürlich gelten, denn  $Q$  ist ja nichts anderes als die Menge  $M$  ohne dem Element  $a$ . Um es etwas zu veranschaulichen, geht es mit einer konkreten Menge  $M$  weiter.

$$M := \{a, b, c\} \quad Q := M \setminus \{a\} = \{b, c\}$$

$$\mathcal{P}(Q) = \{ \{\emptyset\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\} \}$$

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(Q) \cup \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\} \}$$

Da bei wachsenden Potenzen zur Basis 2 die Werte sich jeweils verdoppeln, kann die Mächtigkeit von  $\mathcal{P}(M)$  auch als Summe von  $|\mathcal{P}(Q)| + |\mathcal{P}(Q)|$  geschrieben werden.

$$|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(Q)| + |\mathcal{P}(Q)|$$

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^n + 2^n = 2^n(1 + 1) = 2^n \cdot 2^1 = 2^{n+1}$$

□

### 3.2 Mengenoperationen

- I. Unter dem **Komplement** einer Menge  $M$  versteht man genau die Elemente, die nicht Element von  $M$  sind. Dazu muss aber der Begriff der **Grundmenge**<sup>27</sup> deutlich sein: das ist die übergeordnete Menge, in der gerade operiert wird. In diesem Skript wird  $G$  stets als die Grundmenge bezeichnet, die je nach Kontext verschieden ausfallen kann. Notiert wird das Komplement mit einem Strich.

$$\bar{M} = \{m \in G \mid m \notin M\}$$

Habe ich als Grundmenge die reellen Zahlen und bilde das Komplement der natürlichen Zahlen, dann besteht das Komplement genau aus den reellen Zahlen, die nicht natürlich sind. Noch ein Beispiel: nehme ich als Grundmenge den Kader des FC Bayern München der Saison 04/05 und betrachte eine Menge  $B$ :

$$B = \{\text{Kahn, Makaay, Ballack}\}$$

So ist das Komplement  $\bar{B}$  nicht *der Kaiser*, sondern genau die Spieler des Kaders, die nicht Element von  $B$  sind. Soviel also zum Komplement.

- II. Der **Durchschnitt** zweier Mengen  $A$  und  $B$  beinhaltet genau die Elemente, die zugleich  $A$  und auch  $B$  angehören. Dies wird auch als *Schnittmenge* bezeichnet.

$$A \cap B := \{x \in G \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Ist der Durchschnitt zweier Mengen die leere Menge  $\emptyset$ , d.h. es gibt keine gemeinsamen Elemente, so spricht man von **disjunkten** Mengen. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{4, 5, 6\} \\ A \cap B &= \{\emptyset\} \end{aligned}$$

- III. Die **Vereinigung** zweier Mengen  $A$  und  $B$  bildet genau die Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen  $A$  oder  $B$  angehören.

$$A \cup B := \{x \in G \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Es ist darauf zu achten, dass man beide Mengen nicht stumpf „in einen Topf wirft“, sondern identische Elemente nur einmal in der Vereinigung auftreten.

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{2, 3, 4\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

- IV. Bildet man die **Differenz** zweier Mengen  $A$  und  $B$ , so beinhaltet die Differenz genau die Elemente, die zu  $A$ , aber *nicht* zu  $B$  gehören.

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

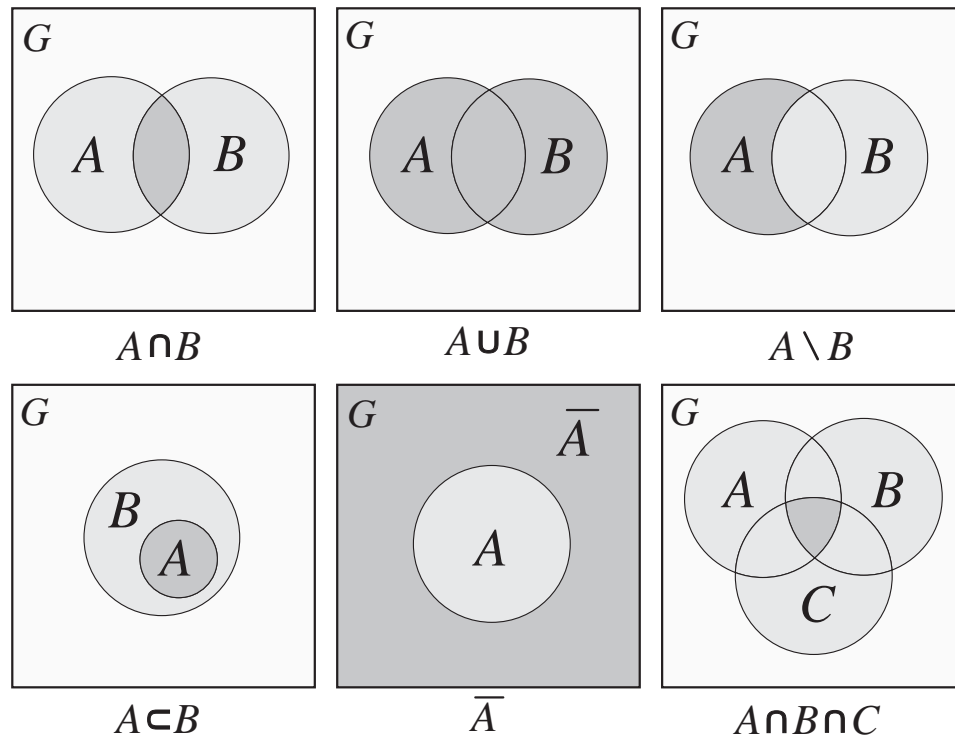
Man kann diese Operation analog auch mit der arithmetischen Subtraktion vergleichen. Das illustriert das folgende Beispiel.

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ B &= \{2, 3, 4, 5\} \\ A \setminus B &= \{1, 6\} \end{aligned}$$

<sup>27</sup>Die Grundmenge wird auch als „Universum“ bezeichnet.

❖ DARSTELLUNG DURCH VENN-DIAGRAMME

Zur Visualisierung von Mengenoperationen eignen sich besonders die sog. *Venn-Diagramme*, bei denen Mengen grafisch durch geschlossene Objekte dargestellt werden.



★ **Beispiel.** für eine exemplarische Mengenberechnung.

Unsere Grundmenge seien die reellen Zahlen. Nun kreiere ich zwei Mengen, die ich daraufhin mit den genannten Operationen verknüpfen will.

$$\begin{aligned}
 L &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\
 M &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}
 \end{aligned}$$

Die Mengen sind ausreichen definiert, jetzt wird damit gearbeitet.

- $L \cap M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$
- $L \cap M \cap \mathbb{N} = \{1, 2\}$
- $L \cup M = \mathbb{R}$
- $M \setminus L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
- $\bar{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

❖ MÄCHTIGKEIT EINER VEREINIGUNG

Da Mengen nicht zwangsläufig disjunkt sind, kann man bei der Berechnung der Mächtigkeit einer Vereinigungsmenge die einzelnen Mächtigkeiten nicht einfach addieren, sondern muss darüber hinaus den Durchschnitt abziehen.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

❖ VEREINIGUNG UND DURCHSCHNITT VON BELIEBIG VIELEN MENGEN  $M_1, \dots, M_n$ 

Wie Summen oder Produkte können auch Vereinigungen bzw. Durchschnitte von Mengen indiziert und mit einem betreffenden Zeichen dargestellt werden.

$$\bigcup_{i=1}^n M_i = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n M_i = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

Als Index muss nicht unbedingt eine natürliche Zahl stehen. Man könnte auch Elemente aus einer Indexmenge wählen.

## ★ Beispiel.

Seien  $\text{Abi}_{1998}, \dots, \text{Abi}_{2004}$  jeweils die Schüler einer gymnasialen Oberstufe, die an der Abiturprüfung des entsprechenden Jahres teilgenommen haben.

$$\bigcup_{i=1998}^{2004} \text{Abi}_i$$

Kennzeichnet die Menge der Schüler jener gymnasialen Oberstufe, die *irgendwann* in den Jahren 1998 bis 2004 an der Abiturprüfung teilgenommen haben.

$$\bigcap_{i=1998}^{2004} \text{Abi}_i$$

Kennzeichnet die Menge der Schüler jener gymnasialen Oberstufe, die in *allen* Jahren zwischen 1998 bis 2004 an der Abiturprüfung teilgenommen haben.

## ★ Beispiel.

Noch ein kleines Beispiel hierzu. Man wählt als Grundmenge  $G$  alle Nutzer von Internet-Foren, die irgendwo mindestens einen Thread eröffnet haben. Betrachtet man dann ein bestimmtes Forum, so könnte man mit der Menge  $G$  über einen gesamten Monat Vereinigung bzw. Durchschnitt bilden.

$$\bigcup_{i=1}^{31} g \in \text{Beitrag am } i.\text{Oktober verfasst}$$

Damit hätten wir genau die Menge der Nutzer erfasst, die *irgendwann* im Oktober in diesem Forum mind. einen Thread eröffnet haben.

$$\bigcap_{i=1}^{31} g \in \text{Beitrag am } i.\text{Oktober verfasst}$$

Bezeichnet genau die Menge der Nutzer, die an *allen* Tagen im Oktober in diesem Forum mind. einen Thread eröffnet haben und man allgemein als Spammer bezeichnet.

### 3.3 Rechenregeln für Mengen

Auch für Mengen gelten bestimmte Gesetze, die die Rechnung mit Mengen deutlich vereinfachen können. Für beliebige Mengen  $A, B, C$  gilt stets:

$$\begin{array}{ll}
 \left. \begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \right\} & \text{Kommutativgesetze} \\
 \left. \begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array} \right\} & \text{Assoziativgesetze} \\
 \left. \begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right\} & \text{Distributivgesetze} \\
 \left. \begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array} \right\} & \text{Absorptionsgesetze} \\
 \left. \begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{array} \right\} & \text{De Morgansche Regeln I} \\
 \left. \begin{array}{l} A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{array} \right\} & \text{De Morgansche Regeln II}
 \end{array}$$

✕ *Beweis.*

Es soll exemplarisch die Gültigkeit der ersten De Morganschen Regeln bewiesen werden. Dazu wird die Aussage über die Definition der Gleichheit von Mengen gezeigt.

$$\begin{array}{ll}
 i. & (\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}) \quad \wedge \quad (\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cap B}) \\
 ii. & (\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}) \quad \wedge \quad (\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B})
 \end{array}$$

Dazu muss durch Umformungen nichts anderes gezeigt werden, als dass ein Element  $x$ , welches Bestandteil von  $\bar{A} \cap \bar{B}$  ist, auch Element von  $\overline{A \cup B}$  ist und umgekehrt.

$$\begin{array}{ll}
 i. & x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \\
 & \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \\
 & \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
 & \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \\
 & \Leftrightarrow x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B} \\
 & \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B} \\
 ii. & x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \\
 & \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\
 & \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\
 & \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\
 & \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \\
 & \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}
 \end{array}$$

□

⊗ **Korollar.**

Aus den Gesetzen und Regeln lassen sich allerart Folgerungen ableiten.

$$\begin{array}{ll}
 A \cap \emptyset = \emptyset & \bar{\emptyset} = G \\
 A \cup A = A & \bar{\bar{A}} = A \\
 A \cap G = A & \bar{\bar{G}} = \emptyset
 \end{array}$$

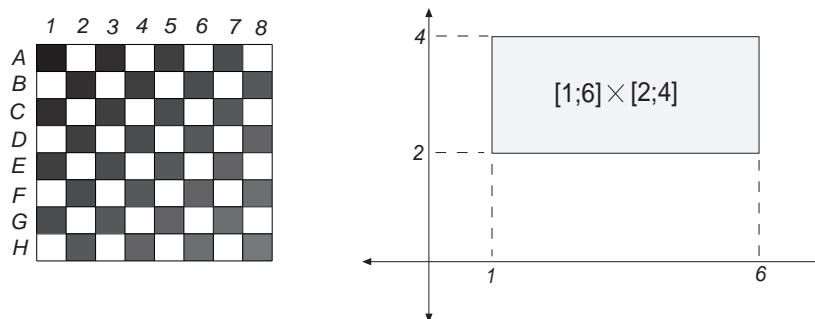


### 3.4 Tupel und das kartesische Produkt

Mengen sind bekanntlich Zusammenfassungen von wohlunterschiedenen Objekten. Allerdings spielt die Anordnung der Elemente i.d.R. keine große Rolle. Die Mengen  $A = \{x, y, z\}$  und  $B = \{z, y, x\}$  sind also identisch. Nun lassen sich aber aus mehreren Mengen durch Herausnehmen jeweils eines Elements geordnete Paare bilden, wo die Anordnung durchaus von Bedeutung sein kann. Hier tritt die Idee sog.  **$n$ -Tupel** auf: das ist quasi der allgemeine Ausdruck des Wortes „Paar“, das bekanntlich für eine Zusammenstellung von *zwei* Elementen steht. Simplex Beispiel aus der Alltagswelt ist das Elternpaar  $(p, m)$ , wo die Elemente „Papa“  $\in M$  und „Mama“  $\in F$  solch eine Zusammenstellung bilden. Angenommen, jedes Elternpaar hätte *genau ein* Kind, so ließe sich das 3-Tupel<sup>28</sup> „Familie“  $(p, m, k)$  mit  $p \in M$ ,  $m \in F$  und  $k \in (M \cup F)$  konstruieren. Ordnen wir nun jedem Element einer Menge  $A$  jeweils die Elemente einer Menge  $B$  zu – bilden also zu den Elementen von  $A$  alle möglichen geordneten Paare mit  $B$  –, dann spricht man vom **kartesischen Produkt**, auch Kreuzprodukt genannt.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Hier ist die Anordnung nun nicht mehr kommutativ, denn es gilt  $(a, b) \neq (b, a)$  unter der Bedingung, dass  $a \neq b$  gilt. Dies kann man sich einleuchtend am Beispiel eines geordneten  $(x, y)$ -Paares des zweidimensionalen kartesischen Raumes  $\mathbb{R}^2$  vorstellen. So wäre  $(2, 4) \neq (4, 2)$ , wohingegen aber  $\{2, 4\} = \{4, 2\}$  ist. Man erkennt die übergeordnete Struktur von Tupeln im Vergleich zu Mengen. Stumpf gesagt: bei Tupeln spielt die Anordnung eine Rolle, bei Mengen hingegen nicht. Nimmt man beispielsweise aus  $\mathbb{R}$  zwei Teilmengen, am besten zwei Intervalle, bildet das kartesische Produkt zwischen diesen, dann entsteht in der geometrischen Deutung ein Viereck in der Ebene. Noch anschaulicher ist der Vergleich zum Schachspiel. Alle Felder auf dem Schachbrett lassen sich durch  $\{A, \dots, H\} \times \{1, \dots, 8\}$  adressieren.



Die Abb. veranschaulicht das kartesische Produkt.

★ **Beispiel.** für die Berechnung von kartesischen Produkten.

Um etwas Praxis zu erlangen, soll nun an zwei Mengen das kartesische Produkt berechnet werden. Da  $M_1 \neq M_2$  gilt auch  $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$ .

$$M_1 := \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$$

$$M_2 := \{7, 9\}$$

$$M_1 \times M_2 = \{(\clubsuit, 7), (\clubsuit, 9), (\heartsuit, 7), (\heartsuit, 9), (\spadesuit, 7), (\spadesuit, 9)\}$$

$$M_2 \times M_1 = \{(7, \clubsuit), (7, \heartsuit), (7, \spadesuit), (9, \clubsuit), (9, \heartsuit), (9, \spadesuit)\}$$

<sup>28</sup>Man bezeichnet 3-Tupel auch als *Tripel*, 4-Tupel hier und da als *Quadrupel*.

Will man nun die *Mächtigkeit* eines Kreuzprodukts berechnen, also die Anzahl an Elementen der Verknüpfung, dann berechnet sich dies durch die Multiplikation der einzelnen Mächtigkeiten der jeweiligen Mengen. Für zwei Mengen gilt:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Beim letzten Beispiel scheint dies zu stimmen, denn das Kreuzprodukt hat  $2 \cdot 3 = 6$  Elemente. Wie sieht es aber bei der Verkettung von Kreuzprodukten aus?

$$M_1 := \{a, b, c\} \quad M_2 := \{d, e, f\} \quad M_3 := \{g, h, i\}$$

Werden diese drei Mengen nun per Kreuzprodukt verkettet, so resultiert dies in einer recht großen Menge, die laut Formel genau 27 Elemente haben müsste.

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 \times M_3 = & \{ (a, d, g), (a, d, h), (a, d, i), (a, e, g), (a, e, h), \\ & (a, e, i), (a, f, g), (a, f, h), (a, f, i), (b, d, g), \\ & (b, d, h), (b, d, i), (b, e, g), (b, e, h), (b, e, i), \\ & (b, f, g), (b, f, h), (b, f, i), (c, d, g), (c, d, h), \\ & (c, d, i), (c, e, g), (c, e, h), (c, e, i), (c, f, g), \\ & (c, f, h), (c, f, i) \} \end{aligned}$$

$$|M_1 \times M_2 \times M_3| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot |M_3| = 3^3$$

Wendet man das Kreuzprodukt ein- oder mehrmalig auf ein und dieselbe Menge an, so gibt es eine abkürzende Notation: für  $n$ -mal auf einer Menge  $M$  schreibt man  $M^n$ . Bestes Beispiel ist  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ , wo man auf den reellen Zahlen Tupel oder Tripel bildet und diese als Komponenten von Koordinaten im euklidischen Raum nutzt.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Die Menge  $\mathbb{R}$  wird somit per Kreuzprodukt  $n$ -mal verkettet und man operiert anschließend mit Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Abschließend seien noch einmal einige wichtige Eigenschaften des kartesischen Produkts für beliebige Mengen  $K, M, N$  zusammengefasst. Die erste Eigenschaft soll danach kurz illustriert werden.

- i.  $M \subset N \quad \Rightarrow \quad (M \times K \subset N \times K) \wedge (K \times M \subset K \times N)$
- ii.  $M \times (N \cup K) = (M \times N) \cup (M \times K)$
- iii.  $M \times (N \cap K) = (M \times N) \cap (M \times K)$

★ **Beispiel.** für die erste genannte Eigenschaft.

Mit den drei kleinen Mengen  $M := \{a\}$  sowie  $N := \{a, b\}$  und  $K := \{c, d\}$  lässt sich gut illustrieren, dass wenn  $M \subset N$  gilt,  $M \times K$  wiederum Teilmenge von  $N \times K$  ist und für  $K \times M$  und  $K \times M$  dasselbe in Grün gilt.

$$\begin{aligned} M \times K &= \{(a, c), (a, d)\} \\ N \times K &= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\} \\ K \times M &= \{(c, a), (d, a)\} \\ K \times N &= \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\} \end{aligned}$$

## 4 Relationen

Der Begriff der *Relation* lässt sich im gewissen Sinne als allgemeiner Ausdruck der *Funktion* betrachten. In der Schule werden häufig Funktionen  $\in \mathbb{R}^2$  betrachtet und als Graphen im kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Dabei wird leider selten deutlich gemacht, dass jedem  $x \in D$  *genau ein*  $y$  zugeordnet ist. Bei Relationen hingegen können einem  $x$  durchaus mehrere  $y$  zugeordnet werden. Und wie man beim Begriff schon richtig vermutet, handelt es sich um Beziehungen zwischen Mengen – genauer gesagt um eine Teilmenge eines Kreuzprodukts.

### 4.1 Ordnungsrelationen

Betrachtet man beispielsweise die Menge  $D$  aller Damen in einem Schuhgeschäft und die Menge  $S$  aller Schuhe, so lässt sich die Relation „Anprobiert“ bilden, die aus allen Paaren  $(d, s) \in D \times S$  besteht. Auch wenn es sich dabei in den meisten Fällen um eine recht große Teilmenge handelt, so wird kaum jede der anwesenden Damen *alle* vorhandenen Schuhe anprobiert haben. Eine beliebige Relation  $R$  zwischen einer Mengen  $M$  und einer Menge  $N$  ist also wie folgt definiert.

$$R \subset M \times N$$

Um deutlich zu machen, dass ein Tupel  $(x, y)$  zur Relation gehört, schreibt man entweder  $R(x, y)$  oder alternativ  $xRy$ . Auch auf die Gefahr des Wiederholens hin: Man beachte, dass die Reihenfolge von Bedeutung ist – beim genannten Beispiel probieren schließlich die Damen die Schuhe an und nicht umgekehrt. Ein weiteres Beispiel wäre die Relation „simples Horoskop“, die eine Teilmenge aus  $Geburtsdatum \times Planetenstellung \times Hokuspokus$  bildet. Allgemein nennt man eine Relation  $R$  in *ein und derselben* Menge eine *binäre*, d.h. zweistellige, Relation, so dass  $R \subset M \times M$  gilt. Für binäre Relationen gelten folgende nennenswerte Eigenschaften.

Reflexivität	$:\Leftrightarrow$	$\forall m \in M : R(m, m)$
Irreflexivität	$:\Leftrightarrow$	$\neg \exists m \in M : R(m, m)$
Symmetrie	$:\Leftrightarrow$	$\forall m, n \in M : R(m, n) \Rightarrow R(n, m)$
Asymmetrie	$:\Leftrightarrow$	$\forall m, n \in M : R(m, n) \Rightarrow \neg R(n, m)$
Antisymmetrie	$:\Leftrightarrow$	$\forall m, n \in M : R(m, n) \wedge R(n, m) \Rightarrow m = n$
Transitivität	$:\Leftrightarrow$	$\forall m, n, p \in M : R(m, n) \wedge R(n, p) \Rightarrow R(m, p)$

Reflexiv<sup>29</sup> bedeutet, dass jedes Element einer Menge auch in Relation zu sich selber steht. Nimmt man die Menge  $S$  der Studenten, dann wäre die Beziehung „kennt Matrikelnummer“ eine reflexive Beziehung, da man als Student oft die Matrikelnummern einiger Kommilitonen kennt, seine eigene im Modellfall aber immer. Symmetrisch hingegen bestimmt, dass wenn ein Element  $x$  in Relation zu  $y$  steht,  $y$  auch in Relation zu  $x$  steht. Bei den Matrikelnummern ist das nicht der Fall, nimmt man aber die Menge  $W$  der Westernhelden und kreiert die Relation „Duelliert“, dann haben wir eine symmetrische Relation. Zuletzt sei noch eine transitive<sup>30</sup> Relation genannt: Sei  $S$  die Menge der deutschen Städte, dann ist die Relation „Verbunden“ eine transitive Relation, denn wenn Stadt  $a$  in irgendeiner bestimmten Form mit  $b$  verbunden ist,  $b$  wiederum mit  $c$  in Verbindung steht, dann ist  $c$  auch über  $a$  erreichbar.

<sup>29</sup>(lat.) *reflexiv*: rückbezüglich

<sup>30</sup>(lat.) *transitiv*: zielend

Ist eine binäre Relation gleichzeitig reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, so nennt man diese Relation eine *Ordnungsrelation*. Die drei genannten Beispiele wären z.B. keine Ordnungsrelationen, da u.a. keine von ihnen antisymmetrisch ist – ist Stadt  $a$  mit Stadt  $b$  verbunden und  $b$  mit  $a$ , dann bedeutet das nicht, dass  $a = b$  ist. Nehmen wir aber die Relation „ $\subset$ “ über einer Menge  $M$ , dann gelten die Anforderungen.

$$\begin{array}{ll} \text{Reflexivität} & M_1 \subset M_1 \\ \text{Transitivität} & (M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_3) \Rightarrow M_1 \subset M_3 \\ \text{Antisymmetrie} & (M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1) \Rightarrow M_1 = M_2 \end{array}$$

Bei der Relation „ $>$ “ über den natürlichen Zahlen gilt nur die Eigenschaft der Transitivität, sie ist somit keine Ordnungsrelation. Allerdings ist „ $\geq$ “ eine Ordnungsrelation, denn hier gelten die genannten Anforderungen.

## 4.2 Äquivalenzrelationen

Neben den *Ordnungsrelationen* erfolgt noch eine weitere Einteilung. Man spricht von *Äquivalenzrelationen*, wenn eine Relation *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist. Der Nutzen von Äquivalenzrelationen ist das Partitionieren einer Menge in äquivalente Elemente. So wäre die Relation „ $=$ “ über  $\mathbb{R}$  z.B. eine Äquivalenzrelation, denn sie ist gleichzeitig reflexiv, symmetrisch und transitiv.

$$\begin{array}{lll} \text{Reflexivität} & x = x \\ \text{Symmetrie} & x = y & \Rightarrow y = x \\ \text{Transitivität} & (x = y \wedge y = z) & \Rightarrow x = z \end{array}$$

Ein weiteres Beispiel aus der Alltagswelt sind Relationen wie „Verwandt“ oder „Hat dieselbe Haarfarbe wie“, die ebenso zu den Äquivalenzrelationen zählen. Betrachtet man über der Menge aller Bushaltestellen die Relation „Verbunden über Linie 41“, so handelt es sich aufgrund fehlender Antisymmetrie nicht um eine Ordnungsrelation; dafür aber um eine Äquivalenzrelation.

## 4.3 Äquivalenzklassen

Äquivalenzrelationen definieren so etwas wie Gleichheit und zerlegen eine betrachtete Menge in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen. Was heißt das? Nun, das bedeutet, dass die Schnittmenge zweier Äquivalenzklassen die leere Menge ist – ist sie das nicht, so sind die Äquivalenzklassen identisch. Darum spricht man auch von einer Partitionierung<sup>31</sup> über der Menge. Als einleuchtendes und relativ kurzes Beispiel sei  $M = \mathbb{Z}$  genannt, auf der nun die Relation „ $(x - y)$  ist teilbar durch zwei“ definiert wird.

$$R(x, y) := (x - y) \text{ teilbar durch } 2$$

Erste Frage: Handelt es sich um eine Äquivalenzrelation? ... Ja, und das lässt sich über die Anforderungen schnell nachprüfen. Zweiter Schritt: das Einteilen in Klassen. Und da existieren drei Klassen, nämlich „zwei mal gerade Zahl“, „zwei mal ungerade Zahl“ und „eine Zahl gerade, die andere ungerade“. Da die Relation aber nur bei den ersten beiden genannten erfüllt ist, haben wir genau zwei Äquivalenzklassen.

$$\begin{aligned} k_0 &= 2z \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \\ k_1 &= 2z + 1 \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

<sup>31</sup>(lat.) *partitionieren*: in logische Einheiten einteilen

## 5 Abbildungen

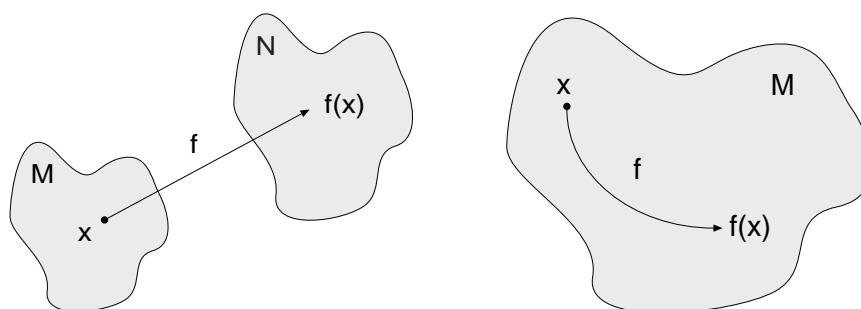
Es tauchte bereits an vielen Stellen der Begriff der *Abbildung* auf, hier und dort wurde von *Funktionen* gesprochen, und nun soll dieses Thema etwas genauer untersucht werden. Was sind also Abbildungen? Die Antwort steckt z.T. schon im Begriff selber: man bildet etwas ab. Das hat aber weniger was mit künstlerischem Schaffen zu tun – wobei das Kreieren neuer Abbildungen ein künstlerischer Prozess ist –, sondern es geht wieder um Mengen, in denen man einem Element gemäß einer Vorschrift ein anderes Element zuordnet. Meist geht es dabei um zwei Mengen  $M$  und  $N$ , wobei man die erste Menge *Definitions Menge* und die zweite Menge *Zielmenge* nennt.

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow N \\ m &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

Die obere Notation fixiert die Mengen, in denen die Abbildung geschehen soll, die untere mit dem etwas anderen Pfeil beschreibt die Elemente der Menge, zwischen denen die Zuordnung erfolgt. Natürlich kann auch innerhalb ein und derselben Menge eine Abbildung erfolgen. Man spricht in diesem Fall von *Selbstabbildung* oder *Identität*.

$$\begin{aligned} \text{id}_M : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto m. \end{aligned}$$

Noch eine wichtige Bemerkung: Das  $f(m)$ , welches in der Schule oft als Synonym für die Funktion selber benutzt wird, ist hier immer genau das Element der Menge  $N$ , welches man erhält, wenn  $f$  auf  $m$  angewendet wird. Das Element  $n = f(m)$  heißt das Bild von  $m$ , und  $m$  heißt ein Urbild von  $n$ .



Die Abb. zeigt die eine Abbildung zwischen zwei Mengen sowie die Identität.

Eine Abbildung ist also genau dann gegeben, wenn *jedem*  $m \in M$  *genau ein*  $n \in N$  zugeordnet wird. Man beachte aber, dass ein  $n$  durchaus mehrere Urbilder haben darf. Existieren beispielsweise die zwei Mengen  $M := \{a, b, c\}$  und  $N := \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ , dann erzeuge ich folgende legitime Abbildung.

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow N \\ m &\longmapsto \spadesuit \end{aligned}$$

Durch diese *konstante* Abbildung – ich bilde alle Elemente aus  $M$  auf das Element Pik ab – ist der Abbildungsbegriff nicht verletzt, denn jedem Element aus meiner Definitionsmenge ist *genau ein* Element aus der Zielmenge zugeordnet. Die Tatsache, dass drei Elemente aus  $N$  kein Urbild haben stellt keine Verletzung dar.

## 5.1 Eigenschaften von Abbildungen

Wenn man Abbildungen nach ihren Eigenschaften einteilt, dann unterscheidet man zwischen *injektiven*, *surjektiven* und *bijektiven* Abbildungen, wobei die bijektiven Abbildungen die strengste Form stellen. Diese stellen eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Elementen zweier Mengen her. Das bedeutet im Klartext, dass einmal alle Elemente aus  $M$  und  $N$  ein Korrelat besitzen und dieses außerdem stets eindeutig ist – was folglich die Gleichmächtigkeit der Mengen impliziert. Man denke sich beispielhaft die Studenten an einer Hochschule als Menge  $M$ , die vergebenen Matrikelnummern als Menge  $N$  und eine Vorschrift, durch die jeder Studenten auf eine Matrikelnummer abgebildet wurde. Somit hätten wir eine bijektive Abbildung geschaffen.

$$\text{Injektivität} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall m \in M \text{ mit } m_1 \neq m_2 : \quad f(m_1) \neq f(m_2)$$

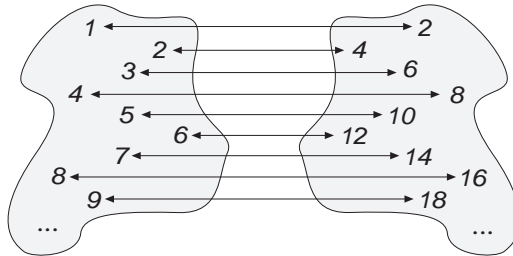
$$\text{Surjektivität} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall n \in N \quad \exists m \in M : \quad f(m) = n$$

$$\text{Bijektivität} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall n \in N \quad !\exists m \in M : \quad f(m) = n$$

Bei einer *injektiven* Abbildung handelt es sich um eine Abbildung, bei der verschiedene Elemente  $m_1 \neq m_2$  auf verschiedene Bilder  $f(m_1) \neq f(m_2)$  abgebildet werden. Daher hat jedes  $n \in N$  *höchstens* ein Urbild. *Surjektiv* hingegen bedeutet, dass für alle Bilder  $n \in N$  *mindestens* ein Urbild vorhanden ist. Eine Ziel- bzw. Bildmenge  $N$ , die mehr Elemente als die Definitionsmenge  $M$  enthält, kann nicht über eine surjektive Abbildung verknüpft sein. Und bijektiv bedeutet nun, dass es für alle  $n \in N$  *genau ein* Urbild gibt, was natürlich die gleichzeitige Surjektivität und Injektivität beinhaltet. Nehmen wir nun ein paar bekannte Abbildungen und und klassifizieren diese.

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{ii.} & f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} & \text{iii.} & f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1] \\ & x \longmapsto x^3 & & x \longmapsto x^2 & & x \longmapsto \sin x \end{array}$$

Die erste durchläuft  $\mathbb{R}$  in eindeutiger Weise, sie ist also bijektiv: jedem  $x$  ist genau ein eindeutiges Bild zugeordnet und jedes  $y$  hat genau ein eindeutiges Urbild. Bei der zweiten haben einige  $y$  kein Urbild, z.B. 41, sie ist aber dennoch injektiv. Die letzte hingegen ist rein surjektiv, da alle  $y$  mindestens ein Urbild haben. Mit dem Wissen, dass bijektive Abbildungen nur auf gleichmächtigen Mengen funktionieren, kann man nun zwei Mengen bequem auf Gleichmächtigkeit überprüfen. Einmal als Beispiel die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  und die Menge  $M := \{2n \text{ mit } n \in \mathbb{N}\}$  der positiven geraden Zahlen. Beide haben unendlich viele Elemente, doch sind sie gleichmächtig?



Die Abb. illustriert die Überprüfung auf Gleichmächtigkeit mit Hilfe einer bijektiven Abbildung.

Sie sind gleichmächtig, denn es lässt sich eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow M$  finden, die jedem  $n \in \mathbb{N}$  mit der Vorschrift  $f(n) = 2n$  genau ein  $m \in M$  zuordnet. Sollte Ihnen jemand weismachen wollen, dass  $\mathbb{N}$  doppelt so viele Elemente wie die Menge der geraden natürlichen Zahlen hat, dann können sie nun locker das Gegenteil beweisen.

## 5.2 Inverse Abbildung und Komposition

Da bei Mengen, die über eine bijektive Abbildung verknüpft sind, alle Bilder ein eindeutiges Urbild besitzen, kann man folglich für alle Elemente die Umkehrabbildung anwenden und wieder beim Urbild landen.

$$\begin{aligned} f^{-1} : N &\longrightarrow M \\ n &\longmapsto f^{-1}(n) \end{aligned}$$

Neben der Umkehrabbildung spricht man auch von einer *inversen* Abbildung. Im letzten Beispiel mit der Gleichmächtigkeit wäre unsere Abbildungsvorschrift  $m = 2n$ . Soll nun der Weg rückwärts gegangen werden, also  $f^{-1}(n)$  gebildet werden, dann muss nach  $N$  aufgelöst werden, was  $n = \frac{m}{2}$  bedeutet. Einige ergänzende Beispiele.

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto x = \sqrt[3]{y} \end{array} \\ \text{ii.} & \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = 2x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto x = \frac{y-1}{2} \end{array} \\ \text{iii.} & \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto x = \sqrt{y} \end{array} \end{array}$$

Seien drei Mengen  $B, C, D$  und zwei Abbildungen  $f : D \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  gegeben, dann kann man die Abbildung

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z = g(y) = g(f(x)) \\ x \xrightarrow{g \circ f} z \end{array}$$

als Komposition von  $g$  nach  $f$  schreiben.

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\rightarrow C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Hier bitte die Schreibweise und Reihenfolge beachten, denn man wendet erst  $f$ , dann  $g$  an! \* **Lemma.**

1. Für bijektive Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  gilt

$$(f^{-1})^{-1} = f \quad f^{-1} \circ f = id_X \quad f \circ f^{-1} = id_Y$$

2. Sind  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  bijektiv, so ist auch die Komposition  $g \circ f : X \rightarrow Z$  bijektiv und

$$(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

3. Eine Bijektion ist nur bei gleichmächtigen Mengen möglich - logisch, oder ?

★ **Beispiel.**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & f(x) &= 2x + 1 \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{(+)} & g(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Dann könnten wir die folgenden Kompositionen bilden

$$\begin{aligned} g \circ f &= (2x + 1)^2 \\ f \circ g &= 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

## 6 Boole-Verbände

### 6.1 Definition und Axiome

Eine Menge  $M$  nennt sich **Boole-Verband**, wenn auf sie für alle Elemente  $a, b, c \in M$  folgende Axiome gelten.

#### i. Kommutativgesetze

$$a \odot b = b \odot a$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

#### ii. Assoziativgesetze

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$$

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

#### iii. Absorptionsgesetze

$$a \odot (a \oplus b) = a$$

$$a \oplus (a \odot b) = a$$

#### iv. Distributivgesetze

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$$

$$a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$$

Neutrale Elemente bezüglich der Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$ , die bitte nicht zwangsläufig mit der arithmetischen Additions- bzw. Multiplikationsverknüpfung gleichzusetzen sind, werden so definiert, so dass die Verknüpfung das zu verknüpfende Element nicht verändert.

$$\text{neutral bzgl. } \ll \odot \gg := 1 \quad \Rightarrow \quad a \odot 1 = a$$

$$\text{neutral bzgl. } \ll \oplus \gg := 0 \quad \Rightarrow \quad a \oplus 0 = a$$

Das komplementäre Element  $\bar{a}$  ist für beide Verknüpfungen ähnlich definiert.

$$a \odot \bar{a} = 0$$

$$a \oplus \bar{a} = 1$$

#### ★ Beispiel.

Die Menge  $M$  sei eine Potenzmenge einer Grundmenge  $G$ . Dann definieren wir unsere Verknüpfungen auf die Mengenoperationen.

$$\odot := \cap \quad \oplus := \cup$$

Nun ist durch Überprüfung der Axiome zu zeigen, dass die Menge  $M$  mit den Verknüpfungen  $\cap, \cup$  ein Boole-Verband ist.

- $a \cap b = b \cap a \quad a \cup b = b \cup a$
- $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c \quad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$
- $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \quad a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$
- $a \cap (a \cup b) = a \quad a \cup (a \cap b) = a$



- Das neutrale Element bzgl.  $\oplus := \cap$

$$a \cap 1 = a \quad (1 = G)$$

- Das neutrale Element bzgl.  $\odot := \cup$

$$a \cup 1 = a \quad (1 = \emptyset)$$

- Das Komplement  $\bar{a}$  ist für beide Verknüpfungen identisch

$$\bar{a} = G \setminus a$$

⊗ **Korollar.**

Aus den Verknüpfungsaxiomen lassen sich Folgerungen ableiten, um somit neue Axiome einzuführen.

- Aus dem ersten Absorptionsgesetz mit  $(b = a)$  folgt

$$a \odot (a \oplus a) = a$$

Nun wird  $(b = a \oplus a)$  definiert

$$a \oplus (a \odot (a \oplus a)) = a$$

und man erhält als neues Axiom

$$a \oplus a = a$$

- Aus dem zweiten Absorptionsgesetz mit  $(b = a)$  folgt

$$a \oplus (a \odot a) = a$$

Nun findet das zweite Distributivgesetz seine Anwendung mit  $(b = a)$ ,  $c = a$

$$(a \oplus a) \odot (a \oplus a) = a$$

und man erhält als weiteres Axiom

$$a \odot a = a$$

- Mit unseren neu-gefolgerten Axiomen können wir nun noch ein wenig weiter experimentieren, beispielsweise für die neutralen Elemente. Wir wenden hier nur Regeln an, die wir schon kennen oder gefolgert haben.

$$a \oplus 1 = a \oplus (a \oplus \bar{a})$$

$$a \oplus 1 = (a \oplus a) \oplus \bar{a}$$

$$a \oplus 1 = a \oplus \bar{a} \Leftrightarrow 1$$

Und wieder ein neues Axiom erschaffen ...

$$a \oplus 1 = 1$$

- Analog zur letzten Herleitung

$$a \odot 0 = a \odot (a \odot \bar{a})$$

$$a \odot 0 = a \odot \bar{a} \Leftrightarrow 0$$

$$a \odot 0 = 0$$

### Die Kürzungsregel

Gewisse Verknüpfungen können gekürzt werden - was mit den Gesetzen schnell nachgewiesen werden kann.

$$(a \odot b = a \odot c) \wedge (a \oplus b = a \oplus c) \Rightarrow b = c$$

Da  $a \odot b = a \odot c$  gilt, kann man folgende Gleichung aufstellen und die Gesetze anwenden.

$$\underbrace{b \oplus (a \odot b)}_b = \underbrace{b \oplus (a \odot c)}_{(b \oplus a) \odot (b \oplus c)}$$

Da es sich um beliebige Elemente handelt, können  $b$  und  $c$  vertauscht werden.

$$c = (c \oplus a) \odot (c \oplus b)$$

wegen  $b + a = a + b = a + c = c + a$  folgt

$$b = (b \oplus a) \odot (b \oplus c) \Leftrightarrow (c \oplus a) \odot (c \oplus b) = c$$

$$b = c$$

### Zur Eindeutigkeit des komplementären Elements $\bar{a}$

Beweise zur Eindeutigkeit laufen fast immer nach dem selben Schema ab. Man will zeigen, dass ein Element - hier das Komplementärelement - eindeutig bestimmt ist und nicht ein zweites, drittes, viertes, ..., Komplementärelement  $\bar{a}'$ , welches ungleich  $\bar{a}$  ist, existiert. Für diesen Nachweis kann man die Kürzungsregel anwenden.

Es seien zwei komplementäre Elemente

$$a \odot \bar{a} = 0 \quad a \odot \bar{a}' = 0$$

$$a \oplus \bar{a} = 1 \quad a \oplus \bar{a}' = 1$$

Dann folgt aus der Kürzungsregel  $\bar{a} = \bar{a}'$ , was nichts anderes bedeutet, als dass es nur ein komplementäres Element gibt.

### Die De Morganschen Regeln für Boole-Verbände

$$\neg(a \odot b) = \neg a \oplus \neg b \quad \text{bzw.} \quad \overline{a \odot b} = \bar{a} \oplus \bar{b}$$

$$\neg(a \oplus b) = \neg a \odot \neg b \quad \text{bzw.} \quad \overline{a \oplus b} = \bar{a} \odot \bar{b}$$

#### ■ Definition.

Die Elemente  $a, b, \bar{a}$ ... nennt man boole'sche Variablen, die Elemente 0 und 1 heißen boole'sche Konstanten. Und mit diesen Variablen und Konstanten, die verknüpft boole'sche Ausdrücke bilden, lässt sich auch rechnen. Dafür seien allerdings noch drei Vereinbarungen zu treffen.

- Um Klammern zu sparen hat die Verknüpfung  $\odot$  stets Priorität
- Die Verknüpfung  $\odot$  darf man weglassen ( wie bei der Multiplikation ).
- Im folgenden verwende ich für die eingeführten Verknüpfungen die bekannten Zeichen für Multiplikationen ( $\cdot$ ) und Additionen ( $+$ ), in der Hoffnung, dass boole'sche Verknüpfungen nicht mit der Addition und Multiplikation in einen Topf geworfen werden.

★ **Beispiel.**

Wir werden nun ein wenig mit boole'schen Ausdrücken hantieren.

$$ab + \bar{b} = ab + 1\bar{b}$$

Was kann man hier machen ? Nun, man kann z.B. bekannte Gesetze anwenden und Ausdrücke substituieren. Mal schauen, was dann so alles passiert.

$$ab + \bar{b} = ab + (a + \bar{a})\bar{b}$$

Jetzt kann man z.B. das Distributivgesetz anwenden.

$$ab + \bar{b} = ab + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b}$$

$$ab + \bar{b} = a(\underbrace{b + \bar{b}}_1) + \bar{a}\bar{b}$$

$$ab + \bar{b} = a + \bar{a}\bar{b}$$

## 6.2 Binärfunktionen

Bei Binärfunktionen besteht der Definitionsbereich aus den Elementen 0 und 1. Man spricht beispielsweise von *einstelligen* Binärfunktionen

$$x \mapsto f(x)$$

für alle Funktionen in Abhängigkeit der beiden möglichen x-Werte (0, 1)

$x$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Es existieren also vier mögliche Funktionen. Und diese kann man nun auch explizit angeben.

- $f_1(x) = x \cdot \bar{x}$
- $f_2(x) = x$
- $f_3(x) = \bar{x}$
- $f_4(x) = x + \bar{x}$

Bei *zweistelligen* Binärfunktionen kommt eine zweite Variable hinzu

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$$

und die Funktionstafel zählt nun ganze 16 Möglichkeiten, denn nun müssen alle möglichen Funktionen für vier verschiedene Paarungen  $(x_1, x_2)$  notiert werden.

$x_1$	$x_2$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tja, das ist eine ganze Menge. Die Funktionen können jetzt wieder in boole'schen Termen geschrieben werden. Auf geht's.

- $\mathbf{f}_1 \ x_1 \overline{x_2} \quad (\text{False} - \text{Funktion})$   
 $\mathbf{f}_2 \ x_1 x_2$   
 $\mathbf{f}_3 \ \overline{x_1} \Rightarrow \overline{x_2}$   
 $\mathbf{f}_4 \ x_1$   
 $\mathbf{f}_5 \ \overline{f_{12}} = \overline{x_1 + \overline{x_2}} = \overline{x_1} \cdot \overline{\overline{x_2}} = \overline{x_1} x_2$   
 $\mathbf{f}_6 \ x_2$   
 $\mathbf{f}_7 \ (f_3 + f_5) \text{ bzw. } \overline{f_{10}} = \overline{x_1 \Leftrightarrow x_2} \quad (\text{xor})$   
 $\mathbf{f}_8 \ x_1 + x_2 \quad (\text{or})$   
 $\mathbf{f}_9 \ \overline{x_1 + x_2} \quad (\text{nor})$   
 $\mathbf{f}_{10} \ x_1 \Leftrightarrow x_2$   
 $\mathbf{f}_{11} \ \overline{x_2}$   
 $\mathbf{f}_{12} \ x_1 + \overline{x_2} \Leftrightarrow x_2 \Rightarrow x_1$   
 $\mathbf{f}_{13} \ \overline{x_1}$   
 $\mathbf{f}_{14} \ \overline{x_1} + x_2 \Leftrightarrow x_1 \Rightarrow x_2$   
 $\mathbf{f}_{15} \ \overline{x_1 x_2} \quad (\text{nand})$   
 $\mathbf{f}_{16} \ x_1 + \overline{x_1} \quad (\text{True} - \text{Funktion})$

Wie man schnell sieht, kann mit den Axiomen der boole'schen Verbände einiges angestellt und vereinfacht werden. Wenn ich wollte, könnte ich  $x$  mit so vielen ( *nicht den Wert verändernden* ! ) boole'schen Verknüpfungen aufblähen, dass sich ein und derselbe Ausdruck über eine halbe Seite erstreckt ... Kostprobe gefällig ?

$$\begin{aligned}
 & x + \underbrace{x(\bar{x} + x)}_{\underbrace{xx + x\bar{x}}_0} + \bar{x} \underbrace{(xx)}_x yz \\
 & \quad \underbrace{x + x}_x + \underbrace{\bar{x}x}_0 yz \\
 & x + 0 \cdot yz \Leftrightarrow x = f_2(x)
 \end{aligned}$$

Nun zu den *dreistelligen* Binärfunktionen. Hier wird eine dritte Variable eingeführt und alles läuft wieder nach dem selben Schema ab.

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$$

Definieren wir beispielsweise ( $x = x_1 x_2$ ) und ( $y = x_1 \overline{x_3}$ ), sowie die Funktionsvorschrift mit  $\ll \text{oder } (+) \gg$

$$(x, y) \xrightarrow{+} f(x, y)$$

dann erhalten wir eine aussagekräftige Wahrheitstafel

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$\overline{x_3}$	$x_1 \overline{x_3}$	$f$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1

Die Funktionstafel schenke ich mir diesmal, denn  $2^{(2^3)} = 256$  Spalten nun mühsam einzugeben widerstrebt mir irgendwie ... Ach ja, es gibt natürlich auch  $n$ -stellige Binärfunktionen ( ... warum sollte es die auch nicht geben ? ), dort gibt es dann  $2^{(2^n)}$  mögliche Kombinationen. Wer Langeweile hat und einen Blumentopf gewinnen möchte, kann ja mal für 9-stellige Binärfunktionen alle möglichen Funktionen der Reihe nach fein säuberlich notieren. Doch ich fürchte, dafür reicht ein einzelnes Leben nicht.

### † Behauptung

*Alle Binärfunktionen lassen sich auf Konjunktionen und Negationen zurückführen.*

... Ist das wirklich so ? Wenn ja, was soll es denn bringen, wenn man einen kurzen Ausdruck wie z.B.  $x_1 \Leftrightarrow x_3$  durch ein Ungetüm ausdrückt, welches nur aus Negationen und Konjunktionen besteht ? Nun, in der Technik war es z.B. lange Zeit so, dass NAND-Gatter weitaus günstiger als AND-Gatter herzustellen waren. In diese sind in Speicherbausteinen von Computern ja nicht gerade in geringer Stückzahl vertreten. Ein paar Beispiele für solche reduzierten Umformungen.

- $\overline{\overline{x_1 + x_2}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot \overline{x_2}$
- $\overline{x_1 \Leftrightarrow x_2} \quad = \quad \overline{x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(x_1 \cdot \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_2)}$
- $\overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

### † Behauptung

*Alle Binärfunktionen lassen sich durch NOR- oder NAND-Funktionen allein ausdrücken.*

- $\overline{x} = \overline{x \cdot x} = f_{(\cdot)}(x, x)$
- $x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{f_{(\cdot)}(x_1, x_2)}$
- $f_{(\cdot)}(x_1, x_2) = \overline{f_{(\cdot)}(x_1, x_2) \cdot f_{(\cdot)}(x_1, x_2)} = f_{(\cdot)}(f_{(\cdot)}(x_1, x_2), f_{(\cdot)}(x_1, x_2))$

#### 6.2.1 Disjunktive Normalform

Gegeben sei eine einstellige Binärfunktion. Diese lässt sich auch disjunktiv schreiben

$$f(x_1) = x_1 f(1) + \overline{x_1} f(0)$$

Die Wahrheitstafeln für (+) und (−) sind bekannt, sei  $x_1 = 1$

✕ *Beweis.*

- $f(1) = 1 \cdot f(1) + 0 \cdot f(0)$
- $f(1) = f(1)$

Sei nun als zweite (und letzte) Möglichkeit  $x_1 = 0$  gegeben

- $f(0) = 0 \cdot f(1) + 1 \cdot f(0)$
- $f(0) = f(0)$

□

Nun zu den zweistelligen Binärfunktionen. Auch diese lassen sich disjunktiv notieren

$$f(x_1, x_2) = x_1 f(1, x_2) + \overline{x_1} f(0, x_2)$$

Die beiden Funktionen können, da  $x_1$  gegeben ist, für  $x_2$  nun einzeln ausgeschrieben werden.

$$f(1, x_2) = x_2 f(1, 1) + \overline{x_2} f(1, 0)$$

$$f(0, x_2) = x_2 f(0, 1) + \overline{x_2} f(0, 0)$$

Und diese beiden Funktionen setzen wir nun in die disjunktive Formel für zweistellige Binärfunktionen ein und erhalten

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 f(1, 1) + x_1 \overline{x_2} f(1, 0) + \overline{x_1} x_2 f(0, 1) + \overline{x_1} \overline{x_2} f(0, 0)$$

Diese Form der Zerlegung nennen wir von nun an **Disjunktive Normalform**.

※ **Lemma.** Für  $n$  – stellige Binärfunktionen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

gilt folgendes Schema der Zerlegung

$$f(x_1 \rightarrow x_n) = x_i f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \overline{x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Die sukzessive Anwendung ergibt ein Schema, welches ( natürlich ) die gleiche Struktur wie für ein- bzw. zweistellige Binärfunktionen zeigt.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = & x_1 x_2 \dots x_n f(1, 1, \dots, 1) \\ & + \overline{x_1} x_2 \dots x_n f(0, 1, \dots, 1) \\ & + x_1 \overline{x_2} \dots x_n f(1, 0, \dots, 1) \\ & \dots \dots \dots \\ & + \overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_{n-1}} x_n f(0, 0, \dots, 0, 1) \\ & + \overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_n} f(0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Als disjunktive Normalform (DNF) für  $n$  – stellige Binärfunktionen.

Wofür kann man das eigentlich anwenden ? ... Eine wichtige Frage, denn mit der disjunktiven Normalform kann beispielsweise eine Funktion, wo die binären Werte für  $x$  und  $y$  bekannt sind, schnell gefunden werden.

★ **Beispiel.**

Wir nehmen beliebige Funktionswerte und suchen keinen passenden Schuh, sondern nur die zugehörige Funktion.

$x_1$	$x_2$	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Hergeleitet wird sie mit der DNF

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \cdot 1 + x_1 \overline{x_2} \cdot 0 + \overline{x_1} x_2 \cdot 1 + \overline{x_1} \overline{x_2} \cdot 0$$

### 6.2.2 Konjunktive Normalform

Neben der disjunktiven Normalform von Binärfunktionen existiert auch eine konjunktive, die sog. Konjunktive Normalform *KNF*.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + f(0, x_2)) \cdot (\bar{x}_1 + f(1, x_2))$$

Hier kann wieder für die möglichen Fälle  $x_1$  unterschieden werden.

$$x_1 = 0 \Rightarrow (0 + f(0, x_2)) \cdot \underbrace{(1 + f(1, x_2))}_1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow \underbrace{(1 + f(0, x_2))}_1 \cdot (0 + f(1, x_2))$$

So bekommt man die allgemeine konjunktive Normalform für *einstellige* Binärfunktionen.

$$f(x) = (x + f(0)) \cdot (\bar{x} + f(1))$$

Für *zweistellige* Binärfunktionen wird analog die *KNF* hergeleitet.

$$f(x_1, x_2) = \left( x_1 + (x_2 + f(0, 0)) \cdot (\bar{x}_2 + f(0, 1)) \right) \cdot \left( \bar{x}_1 + (x_2 + f(1, 0)) \cdot (x_2 + f(1, 1)) \right) \\ \dots \text{und ausmultipliziert} \dots$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + f(0, 0)) + (x_1 + \bar{x}_2 + f(0, 1)) + (\bar{x}_1 + x_2 + f(1, 0)) + (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + f(1, 1))$$

⊗ **Korollar.**

Aus den Definitionen der Verknüpfungen lassen sich folgende Formeln ableiten, die in den letzten Beispielen zur Anwendung kamen.

$$1 + f(\dots, \dots) = 1$$

$$0 \cdot f(\dots, \dots) = 0$$

Wer sich dieses nicht auswendig auftischen will, kann es auch mit den logischen Verknüpfungen *und* sowie *oder* herleiten. *Wahr* oder auch 1 verknüpft mit *oder* irgendetwas ist immer 1. Gleiches gilt für *und* mit einer Null. Hier können auch noch so viele Einsen auftauchen,  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0$  ist immer null.

### 6.3 Karnaugh-Verfahren

Es geht doch nichts über Vereinfachungen. Darum können bei der disjunktiven oder konjunktiven Normalform gewisse Terme vereinfacht werden, was nun gezeigt wird.

- Bei der *disjunktiven* Normalform

$$ab + a\bar{b} = a(b + \bar{b}) \Leftrightarrow a$$

- Bei der *konjunktiven* Normalform

$$(a + b) \cdot (a + \bar{b}) = a$$

$\hookrightarrow$  Hergeleitet aus den Gesetzen der boolo'schen Verbände.

$$\Rightarrow aa + a\bar{b} + ba + b\bar{b}$$

$$\Rightarrow a + a\bar{b} + ab$$

$$\Rightarrow a + a(b + \bar{b}) \Leftrightarrow a + a \Leftrightarrow a$$

## 7 Induktion und Rekursion

### 7.1 Vollständige Induktion

Bevor noch jemand vollständig an der der Induktion verzweifelt, werde ich nun das Prinzip der vollständigen Induktion als Beweismethode für natürliche Zahlen ansprechen. Vorher werde ich aber noch schnell die **Peano-Axiome** einführen. G. Peano (1858 - 1932) definierte die natürlichen Zahlen wie folgt

- $0 \in \mathbb{N}_0$  Null ist eine natürliche Zahl
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists v(n) \in \mathbb{N}_0$  Für jede natürliche Zahl  $n$  gibt es eine natürliche Zahl als Nachfolger von  $n$
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 0 \neq v(n)$  Null ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : (v(n) = v(m) \Rightarrow n = m)$  Ist der Nachfolger zweier natürlicher Zahlen  $n$  und  $m$  identisch, so sind  $n$  und  $m$  identisch.
- $\forall M \subset \mathbb{N}_0 : (0 \in M \wedge (n \in M \Rightarrow v(n) \in M)) \Rightarrow M = \mathbb{N}_0$  Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ist die einzige Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , die die Zahl 0 und mit jeder Zahl  $n$  auch den Nachfolger  $v(n)$  enthält.

Das letzte Axiom bildet die Grundlage der vollständigen Induktion.

Somit wendet man die vollständige Induktion zum Beweis von Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen  $n$  gelten - von einer bestimmten Zahl  $n_0$  aus - an. Wenn nämlich eine Aussage für eine natürliche Zahl  $n_0$  gilt, und aus der Gültigkeit der Aussage für eine beliebig nachfolgende natürliche Zahl  $v(n)$  ihre Gültigkeit folgt, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0$

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten :

- **Induktionsanfang** : Man zeigt, dass die Aussage  $A(1)$  wahr ist.
- **Induktionsschluß** : Für jedes  $n$ , für welches  $A(n)$  richtig ist, ist auch  $A(n+1)$  richtig.

Noch einmal zum Mitschreiben : Man hat eine Aussage über natürliche Zahlen. Nun zeigt man i.d.R. , dass diese Aussage für  $n = 1$  gültig ist. Ist das der Fall, braucht man nur noch zu zeigen, dass sie auch für  $n + 1$  gültig ist, denn dann ist sie für alle natürlichen  $n$  Zahlen gültig. Alles klar soweit ?

✕ *Beweis.*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \text{bzw.} \quad \binom{n+1}{2}$$

*Induktionsanfang.*

$$n = 1 \text{ gilt, denn } 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

*Induktionsschluß.*

Der Induktionsbeginn stimmt, nun bleibt zu zeigen, dass die Aussage auch gilt für

$$\left( \sum_{i=1}^n i \right) + (n+1)$$

Darum setzen wir nun  $(n+1)$  in die Formel ein und vereinfachen so lange, bis wir eine eindeutige Aussage erhalten.

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \binom{n+2}{2}$$

□



✕ **Beweis.** Wir beweisen, dass  $(x - y)$  Teiler von  $(x^n - y^n)$  ist.

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x^n - y^n) : (x - y)$$

*Induktionsanfang.*

$$n = 1 \text{ gilt, , denn } \frac{(x^1 - y^1)}{(x - y)} = 1$$

*Induktionsschluß.*

Hier setzen wir als Zwischenschritt  $n = k$ , was möglich aber nicht zwingend notwendig ist, und nehmen die Aussage  $(x^k - y^k)$  teilbar durch  $(x - y)$  als wahr an. Jetzt bilden wir den Induktionsschluss für  $n = k + 1$  und formen den Ausdruck um - indem wir eine neutrale Addition durchführen.

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1} \\ x^{k+1} - y^{k+1} &= \underbrace{x^k(x - y)}_{\text{teilbar } (x-y)} + \underbrace{y(x^k - y^k)}_{\text{teilbar } (x-y)} \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist aufgrund der Induktionsannahme durch  $(x - y)$  teilbar. Da beide Summanden durch  $(x - y)$  teilbar sind, ist es die Summe auch.

□

## 7.2 Rekursion

*Rekursiv* bedeutet, dass auf bekannte Werte zurückgegriffen wird und so ein Problem durch immer wiederkehrende Anwendungen einer Formel gelöst wird. Es ist also möglich, eine Formel rekursiv oder funktional zu definieren. Begonnen wird mit dem sog. *Rekursionsbeginn*, welcher  $a_1$  definiert. Danach geht es mit der *Rekursionsformel* weiter, die  $a_{k+1}$  aus  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$  ausrechnet.

★ **Beispiel.**

i.) Sei  $a_1 = 1$  gegeben.

$$ii.) a_{k+1} = \frac{1}{2} \left( a_k + \frac{2}{a_k} \right)$$

$$(a_1) = 1$$

$$(a_2) = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$$

$$(a_3) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12}$$

$$(a_4) = \frac{1}{2} \left( \frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{577}{408}$$

... = ...

$$(a_k) = \frac{1}{2} \left( a_{k-1} + \frac{2}{a_{k-1}} \right) = \frac{(a_{k-1})^2 + 2}{2a_{k-1}}$$

Wie erhalten eine konvergente Folge  $a_n \rightarrow \sqrt{2}$  - was hier aber nicht bewiesen werden soll.

★ **Beispiel.**

Mit dem Prinzip der Rekursion können beispielsweise auch Potenzen rekursiv definiert werden.

$$i.) a^1 = a$$

$$ii.) a^{k+1} = a^k \cdot a$$

Funktioniert ähnlich mit der Fakultät...

$$i.) a_1 = 1$$

$$ii.) a_{k+1} = (a_k)! \cdot k$$

Hier noch ein Vergleich zwischen der funktionalen und rekursiven Definition für das Beispiel der Quadratzahlen  $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

$$\text{funktional} : a(n) = 2^n \quad \text{rekursiv} : a_1 = 1 \quad a_{k+1} = 2 \cdot a_k$$

## 8 Zahlensysteme

Neben dem Dezimalsystem existieren noch andere, besonders in der Informatik oft verwendete Zahlensysteme. Einige sollen hier kurz angeführt und erläutert werden.

### 8.1 Zahlensysteme verschiedener Basen

- **Dezimalsystem**

Unser gängiges Dezimalsystem kennt zehn Ziffern,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}_{(10)}$$

eine natürliche Dezimalzahl setzt sich bekanntlich so zusammen :

$$\nu \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^n \nu_i \cdot 10^i = \nu_0 \cdot 10^0 + \nu_1 \cdot 10^1 + \nu_2 \cdot 10^2 + \dots + \nu_n \cdot 10^n$$

Nehme ich z.B. die Zahl 426438, so setzt sie sich so zusammen :

$$8 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^5$$

Auch Kommazahlen lassen sich in dieser Schreibweise darstellen

$$(23,75)_{(10)} = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

Eine allgemeine Formel gibt es natürlich auch. Eine Kommazahl hätte diese Form ...

$$(x_{(r)}x_{(r-1)}\dots x_{(1)}x_{(0)} , \ x_{(-1)}x_{(-2)}\dots x_{(-s+1)}x_{(-s)})$$

... und ließe sich dann so darstellen.

$$x_{(r)}b^r + x_{(r-1)}b^{r-1} + \dots + x_{(1)}b^1 + x_{(0)}b^0 + x_{(-1)}b^{-1} + \dots + x_{(-s)}b^{-s}$$

- **Dualsystem**

Das Dualsystem, auch unter dem Namen Binärsystem bekannt. Es bestimmt mit  $b = 2$  das ganzzahlige Zahlensystem mit der kleinsten Basis. Aufgrund der bequemen technischen Realisierbarkeit trägt es in der Digitaltechnik eine hohe Bedeutung. Das Dualsystem kennt nur die zwei Ziffern

$$\{0, 1\}$$

Die Umrechnung einer Dezimalzahl in das Dualsystem, wie auch die Umrechnungen zu einer anderen Basis, laufen nach einem bestimmten Schema ab : Man teilt die Dezimalzahl durch die Basis des gesuchten Systems, notiert den jeweiligen Rest und liest das Ergebnis schließlich von unten nach oben ab. Klingt kompliziert ? ... Nein ? ... Gut ! Hier ist trotzdem ein Beispiel zur Verdeutlichung. Umgerechnet wird die Dezimalzahl 57 ins Dualsystem.

57 : 2 = 28	Rest	<b>1</b>
28 : 2 = 14	Rest	<b>0</b>
14 : 2 = 07	Rest	<b>0</b>
07 : 2 = 03	Rest	<b>1</b>
03 : 2 = 01	Rest	<b>1</b>
01 : 2 = 00	Rest	<b>1</b>
$(57)_{10} = (111001)_2$		

Bei Kommazahlen funktioniert die Sache ähnlich, nur muss diesmal mit der entsprechenden Basis multipliziert werden. Ist das Ergebnis größer als Eins, dann wird eine Eins an der entsprechenden Stelle der Dualzahl notiert und die Differenz zwischen dem Ergebnis und Eins bildet die Grundlage der nächsten Multiplikation. Das geschieht dann solange, bis die Multiplikation mit der Basis genau Eins ergibt, eine Periode auftritt oder irgendwann abgebrochen wird und man sich mit einer Näherung zufrieden gibt. Das Ergebnis wird hier übrigens von oben nach unten abgelesen. Wir wandeln nun die Dezimalzahl 0,375 ins Dualsystem um.

0,375 * 2 = 0,750	Rest	0,750
0,750 * 2 = 1,500	Rest	0,500
0,500 * 2 = 1,000	Rest	0,000
$(0,375)_{10} = (0,011)_2$		

- **Trialsystem**

Das Trialsystem bezieht sich auf die Basis  $b = 3$  und kennt drei Ziffern

$$\{0, 1, 2\}$$

- **Oktalsystem**

Das Oktalsystem baut auf der Basis  $b = 8$  auf und kennt acht Ziffern

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- **Hexadezimalsystem**

Das Hexadezimalsystem trägt einen aus 16 Zeichen bestehenden Ziffernvorrat

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

## 8.2 Gleitkommadarstellung

Wir definieren die Gleitkommadarstellung,

$$x = m \cdot b^e$$

wobei  $m$  als **Mantisse** ( ... keine Heuschrecken, sondern die hinter dem Komma stehende Zahl !) und  $b$  als **Exponent** bezeichnet wird. Diese Darstellung kann ferner normalisiert werden, so dass gilt :

$$b^{-1} \leq m < 1$$

★ **Beispiel.**

Wir nehmen die Zahl  $0,00000029 = 2,9 \cdot 10^{-7}$  und normalisieren sie nach der eben genannten Regel  $\hookrightarrow 0,29 \cdot 10^{-6}$ .

### • Addition von Gleitkommazahlen

Wir nehmen zwei Gleitkommazahlen ...

$$z_1 = m_1 \cdot b^{e_1} \quad z_2 = m_2 \cdot b^{e_2} \quad (e_1 \geq e_2) : z_2 = \frac{m_2}{b^{e_1-e_2}} b^{e_1}$$

... und addieren sie. Für die Addition gilt :

$$z_1 + z_2 = \left( m_1 + \frac{m_2}{b^{e_1-e_2}} \right) b^{e_1}$$

★ **Beispiel.** für eine Mantisse mit vier Stellen.

$$(0,1234 \cdot 10^4 + 0,8765 \cdot 10^6) + (-0,8764 \cdot 10^6)$$

Der erste Exponent wird umgeformt, so dass insgesamt nur noch der Exponent 6 existiert.

$$(0,0012 \cdot 10^6 + 0,8765 \cdot 10^6) + (-0,8764 \cdot 10^6)$$

Jetzt brauchen wir uns um die Exponenten nicht weiter zu kümmern und addieren die hinter den Kommata stehenden Zahlen.

$$0,8777 \cdot 10^6 - 0,8764 \cdot 10^6 = 0,1300 \cdot 10^4$$

## 8.3 Umrechnungsarten verschiedener Zahlensysteme

In diesem Unterkapitel soll ein wenig Praxis mit den unterschiedlichen Zahlensystemen gewonnen werden, daher werde ich hier einige exemplarische Darstellungen und Umformungen präsentieren. Spezielle Übungsaufgaben finden sich dann im Übungsskript.

★ **Beispiele.** für Spielereien mit Zahlensystemen.

- $(72)_{10} = (1001000)_2 = (2200)_3 = (110)_8 = (48)_{16}$
- $(16)_{10} = (10000)_2 = (121)_3 = (20)_8 = (10)_{16}$
- $(15)_{10} = (1111)_2 = (33)_3 = (17)_8 = (\text{F})_{16}$
- $(0,725)_{10} = (0,101\overline{1100})_2$

Jetzt wird der Spieß umgedreht und die Oktaldarstellung einer dualen Kommazahl gesucht. Etwas schwieriger, aber mit ein wenig Aufwand noch immer zu schaffen.

$$(10001110, 00110001)_2 \rightarrow (???)_8$$

Wie gehen wir vor ? ... Nun, wird nutzen die Tatsache, dass  $2^n$ -Basen durch das Dualsystem - in einzelnen Komponenten - dargestellt werden können.

$$(x_1x_2x_3\dots x_n)_{2^n}$$

Eine Oktalzahl lässt sich folglich aus drei Komponenten zusammensetzen - eine Hex-Zahl aus ( $2^n = 16$ ) vier dualen Komponenten. Beispielsweise nehmen wir die Zahl  $(23)_8$ . Da wären zwei Dreierkomponenten, nämlich die  $2 = (010)_2$  und die  $3 = (011)_2$ . Jetzt setzen wir die Komponenten zusammen und killen die erste(n) Null(en), sofern solche vorkommen, und erhalten als resultierende Dualzahl  $(10011)_2$ . Alles verstanden ? ... Aha ... Also zurück zur ursprünglichen Umrechnung, denn hier nutzen wir die Dreierkomponent-Variation. Vor dem Komma angefangen zählen wir die Dreierkomponenten und es ergibt sich.

- $(010)_2 = (2)_8$
- $(001)_2 = (1)_8$
- $(110)_2 = (6)_8$
- , ... ..
- $(001)_2 = (1)_8$
- $(100)_2 = (4)_8$
- $(010)_2 = (2)_8$

Siehe da ! So schnell ging es und die gesuchte Oktalzahl steht lächelnd vor unseren müden Augen.

$$(10001110, 00110001)_2 \rightarrow (216, 142)_8$$

Der Vollständigkeit halber machen wir das gleiche Spiel nun mit der Umwandlung ins Hexadezimalsystem. Nicht vergessen, hier benötigt man nun Viererkomponenten.

- $(1000)_2 = (8)_{16}$
- $(1110)_2 = (\text{E})_{16}$
- , ... ..
- $(0011)_2 = (3)_{16}$
- $(0001)_2 = (1)_{16}$

Das ging ja noch schneller und das Ergebnis lautet

$$(10001110, 00110001)_2 \rightarrow (8\text{E}, 31)_{16}$$

### Umrechnung mit dem Horner Schema

Mit dem Horner Schema kann man schon allerlei nette Sachen anstellen. Es verrät mir zwar nicht die Bundesligaergebnisse des nächsten Spieltages, dafür kann man aber neben den Polynomgeschichten auch ein beliebiges Zahlensystem der Basis  $b$  ins Dezimalsystem umrechnen ... Und das geht verdammt schnell. Wir erinnern uns an das Schema nach Horner. Hier trägt es die modifizierte Form :

	$x_r$	$x_{r-1}$	$x_{r-2}$	...	$x_0$
(b)	0	$x_r \cdot b$	$(x_r \cdot b + x_{r-1}) \cdot b$	...	...
	$x_r$	$x_{r-1} + x_r \cdot b$	$x_{r-2} + (x_r \cdot b + x_{r-1}) \cdot b$	...	Resultat

★ **Beispiele.** für Umrechnungen mit dem Hornerschema.

- Umrechnung vom Dual- ins Dezimalsystem, wir wandeln  $(11111)_2$  um.

	1	1	1	1	1
(2)	0	2	6	14	30
	1	3	7	15	$(31)_{10}$

- Umrechnung vom Hex- ins Dezimalsystem, wir wandeln  $(4E20A)_{16}$  um.

	4	E	2	0	A
(16)	0	64	1248	20000	320000
	4	78	1250	20000	$(320010)_{10}$

## 8.4 Komplement und Stellenkomplement

Die größte darstellbare Dezimalzahl einer  $n$ -stelligen Dualzahl, also die maximale Dezimalzahl, lässt sich mit  $2^n - 1$  berechnen. Mit einer dreistelligen Dualzahl ( 3 Bit ) kann man höchstens die Zahl  $(7)_{10} = (111)_2$  darstellen. Nun definiert man das Stellenkomplement für  $z = (z_1 z_2 z_3 \dots z_n)_2$

$$\hat{z} = \left( (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) \dots (1 - z_n) \right)_2$$

Da beim Stellenkomplement somit alle dualen Ziffern vertauscht sind, ergibt sich zwangsläufig für die Summe von  $z$  und  $\hat{z}$  die maximale Dezimalzahl  $\underbrace{(111 \dots 111)}_{n\text{-mal}} = (2^n - 1)_{10}$

Weiterhin definiert das Komplement  $\bar{z}$  zu  $z$  die Ergänzung zu  $2^n$ , da  $\bar{z} = \hat{z} + 1$  gilt. Mit dem Komplement kann man auch duale Zahlen voneinander subtrahieren - einfach indem man mit dem Komplement  $\hat{z}$  addiert.

$$(x)_2 - (y)_2 = x + \bar{y}$$

★ **Beispiel.**

$$x = (101)_2 = (5)_{10} \quad y = (010)_2 = (2)_{10} \quad \hat{y} = (101)_2 \quad \bar{y} = (110)_2 = (6)_{10}$$

$$x + \bar{y} = (101)_2 + (110)_2 = (11)_2 = (3)_{10}$$

Da wir gerade beim Thema Dualzahlen sind, folgt hier der längst überfällige Beweis, dass der Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  *nicht* abzählbar ist und ein **Kontinuum** bildet. Klar, reelle Zahlen kennen keinen direkten Nachfolger - aber den kennen rationale Zahlen auch nicht ... und jene sind trotzdem abzählbar. Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Dualzahlen.

✕ *Beweis.*

Nehmen wir einfach dreist an,  $\mathbb{R}$  wäre tatsächlich abzählbar - annehmen kann man ja vieles. Dann können wir reelle Zahlen auch als Dualzahlen aufschreiben. Schreiben wir also alle reellen Zahlen auf, die uns in unserer kindlichen Naivität über den Weg laufen, so entsteht eine sehr lange Liste mit Dualzahlen der Form

1.  $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$
2.  $b_1 b_2 b_3 \dots b_n$
3.  $c_1 c_2 c_3 \dots c_n$
- ...
- $n$   $k_1 k_2 k_3 \dots k_n$

Gut, nehmen wir also an, wir hätten alle möglichen reellen Zahlen notiert. Dann machen wir folgendes : Wir bilden das Komplement der ersten Ziffer unserer ersten Dualzahl der Liste, dann das Komplement der zweiten Ziffer der zweiten Zahl usw.

1.  $\bar{a}_1 a_2 a_3 \dots a_n$
2.  $b_1 \bar{b}_2 b_3 \dots b_n$
3.  $c_1 c_2 \bar{c}_3 \dots c_n$
- ... ..
- $n$   $k_1 k_2 k_3 \dots \bar{k}_n$

... und erhalten eine neue reelle Zahl  $(\bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 \dots \bar{k}_n)$ , die definitiv nicht in unserer schönen Liste existiert - denn sie stimmt mit keiner der von uns notierten Zahlen überein. Und hier spielt es keine Rolle, ob die Liste kurz, lang oder unendlich lang ist. Wir erhalten durch die Komplementbildung immer wieder neue reelle Zahlen.

□

## 9 Folgen und Reihen

### 9.1 Folgen

Folgen bestehen aus indizierten Zahlen  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , die als Elemente auf der Zahlengeraden  $\mathbb{R}$  dargestellt werden können, wie es bei der Folge  $a_n = \frac{1}{n}$  hier dargestellt ist.

$$\overbrace{0 \dots \dots \dots 1}^{(a_n)} \rightarrow \mathbb{R}$$

Wenn eine Folge gegen einen Wert konvergiert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

dann bezeichnet man diese Folge als konvergent zu  $a$  und schreibt es abkürzend als

$$a_n \longrightarrow a, (n \rightarrow \infty)$$

Desweiteren wird die Umgebung von  $a$  als Intervall  $\varepsilon$  bezeichnet, so dass bei  $\varepsilon > 0$  eine Epsilonumgebung  $(a - \varepsilon)$  sowie  $(a + \varepsilon)$  entsteht.

#### \* Lemma.

Seien zwei konvergente Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  gegeben,

$$a_n \longrightarrow a \qquad b_n \longrightarrow b$$

dann gilt folgender Zusammenhang für den Grenzwert der Folgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b$$

#### \* Beispiel.

Wir ermitteln den Grenzwert einer Folge durch eine elementare Umformung.

$$a_n = \frac{2n^2 - 10}{n^2 + n + 1} \quad | \rightarrow (erw.) \frac{1}{n^2}$$

Dann sieht man schnell, dass die Folge gegen 2 konvergiert - denn alle durch  $n$  teilende Summanden konvergieren gegen Null.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2 - \frac{10}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 2$$

## 9.2 Infimum und Supremum

### ■ Definition.

Ein **Minimum** (min) einer Folge existiert genau dann, wenn ein absolut kleinstes Element existiert - dieses wird dann mit min gekennzeichnet. Analog hierzu die Definition des **Maximums** (max) - welches das absolut größte Element einer Folge bildet. Eine Folge  $a_n$  ist **beschränkt**, wenn sie auf ein bestimmtes Intervall begrenzt ist.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in [(\inf), (\sup)]$$

Die kleinste untere Schranke trägt das Label **Infimum** und die kleinste obere Schranke nennt sich **Supremum**. Zur Verdeutlichung sei angemerkt, dass sich jenseits der oberen oder unteren Schranke keine Elemente befinden. Natürlich existieren Infimum und Supremum nur bei beschränkten Folgen - logisch, nicht wahr ?

Diese Definition auf unsere Ausgangsfolge  $a_n = \frac{1}{n}$  angewendet würde uns aufgrund der Unendlichkeit von  $\mathbb{N}$  kein Minimum liefern.

$$\min(a_n) = \emptyset$$

Allerdings existiert ein Infimum.

$$\inf(a_n) = 0$$

Weiterhin ist bei dieser Folge das Maximum gleich dem Supremum.

$$\max(a_n) = \sup(a_n) = 1$$

Als nächstes folgte die Definition für steigende Folgen : Eine Folge  $(a_n)$  heißt **monoton fallend**, wenn folgendes gilt

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Schließt man konstante Phasen aus, so spricht man auch von einer **streng monoton fallenden** Folge.

$$a_{n+1} < a_n$$

### ★ Beispiele. für konvergente Folgen

•

$$a_n = 1 - 2^{-n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

•

$$b_n = \frac{n-1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

•

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e$$

•

$$d_n = \frac{n}{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

•

$$\epsilon_n = \sqrt[n+2]{n+2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 1$$



### 9.3 Reihen

Zur Bildung einer Reihe braucht man zunächst eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wo dann die Folgeglieder aufsummiert werden. So können aus den Folgegliedern sog. Teil- bzw. Partialsummen gebildet werden. Haben wir eine unendliche geometrische Zahlenfolge,

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots$$

so lassen sich Teilsummen konstruieren, die im Folgenden mit  $s$  bezeichnet werden.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

Diese Teilsummen lassen sich nun zu einer neuen unendlichen Folge zusammenfassen,

$$(s_n) = s_1, s_2, s_3, \dots$$

welche mit Hilfe der indizierten Summe der geometrischen Zahlenfolge gebildet wird.

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Als *unendliche Reihe* bezeichnet man nun die unendliche Summe der geometrischen Folge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots$$

### 9.4 Konvergenz und Divergenz

Eine unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wird als *konvergent* bezeichnet, wenn die Folge ihrer Teilsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  den Grenzwert  $s$  besitzt.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$$

Hat die Folge ihrer Teilsummen *keinen* Grenzwert, so bezeichnet man die unendliche Reihe als *divergent*.

★ **Beispiel.** *Die geometrische Reihe.*

Die geometrische Reihe konvergiert  $\forall q : |q| < 1$  und divergiert  $\forall q : |q| \geq 1$ . Das soll nun gezeigt werden.

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q^1 + q^2 + \dots$$

Nun wird die  $n$ -te Teilsumme  $s_n$  gebildet und mit  $q$  multipliziert

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1} \\ q \cdot S_n &= q^1 + q^2 + \dots + q^n \end{aligned}$$

Jetzt werden sie voneinander subtrahiert.

$$S_n - (q \cdot S_n) = 1 - q^n$$

$$S_n \cdot (1 - q) = 1 - q^n$$

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Die Folge der Teilsummen  $s_n$  hat für  $|q| < 1$  den Grenzwert

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Für  $|q| \geq 1$  divergiert die Zahlenfolge  $(q^n)$  und somit auch die geometrische Reihe.

※ **Lemma.**

- Seien zwei Reihen  $\sum c_k$ ,  $\sum d_k$  konvergent, dann ist  $\sum(c_k + d_k)$  konvergent gegen  $\sum c_k + \sum d_k$ .
- Eine Reihe  $\sum(a \cdot c_k)$  ist konvergent gegen  $a \cdot \sum c_k$ .
- Wenn die Summe der Absolutbeträge einer unendlichen Reihe konvergiert, dann konvergiert auch die unendliche Reihe selbst. Man spricht dann von **absoluter Konvergenz**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| : \text{konvergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \text{konvergent}$$

- Zeigt eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} p^k$ ,  $\{p \in \mathbb{R}, |p| < 1\}$  die Struktur der geometrischen Reihe,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

dann kann  $p$  durch  $q \in (-1, 1)$  ersetzt werden - um somit den Grenzwert der Reihe auszurechnen. Ein paar exemplarische *Beispiele*.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 4 \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} \right) = 4 \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = 5$$

## 9.5 Konvergenzkriterien

Will man bei einer vorgegebenen unendlichen Reihe wissen, ob sie konvergent oder divergent ist, so kann man sie mit Hilfe einiger Kriterien auf Konvergenz untersuchen. Als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung müssen die Glieder einer Reihe stets eine Nullfolge bilden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, (a_n > 0) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Ist diese notwendige Bedingung *nicht* gegeben, so kann man sich die restliche Untersuchung sparen, denn dann ist die unendliche Reihe stets divergent. Das macht ja auch Sinn, denn haben wir beispielsweise eine unendliche Reihe der Form,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} + \frac{1}{n!} = \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + \dots$$

dann gilt für den Grenzwert der Reihenglieder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{n!} \right) = \frac{3}{2}$$

Folglich wächst die Summe im Unendlichen um den Wert  $\frac{3}{2}$  munter weiter an. Wir schreiben uns also hinter die Ohren - oder auch sonstwo hin, dass zur Konvergenz einer unendlichen Reihe eine Nullfolge der Reihenglieder *notwendig* ist. Notwendig, aber nicht hinreichend, denn es gibt auch Reihen, wo dieses Kriterium erfüllt wird, sie aber trotzdem divergieren ( z.B. die harmonische Reihe ). Daher folgen nun weitere Kriterien zur Bestimmung der Konvergenz.

### \* Quotientenkriterium

Erfüllen die Glieder einer vorgegebenen unendlichen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  die Bedingung,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

dann ist die Reihe konvergent. Ist dieser Grenzwert größer als Eins, dann ist die Reihe divergent. Der Sonderfall  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  ist nicht definiert, d.h. wenn für eine betrachtete Reihe der Grenzwert gleich Eins wird, kann die Reihe konvergent oder auch divergent sein. Dann hat man beim Umformen ein paar Schweißperlen umsonst abgedrückt und darf mit einem anderen Kriterium fortfahren. Und genau das wollen wir nun tun !

### ★ Beispiel. Die harmonische Reihe.

Die harmonische Reihe ist die unendliche Summe der  $\frac{1}{n}$  Teilsummen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

Wenden wir hier das Quotientenkriterium an, so erhalten wir für  $a_n = \frac{1}{n}$  und für  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$  den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Das Quotientenkriterium hat leider versagt, somit bleibt uns nur noch ein Beweis übrig, um zu zeigen, dass die harmonische Reihe divergent ist.

✕ *Beweis. Die Divergenz der harmonischen Reihe.*

Wir zaubern eine zweite Reihe aus dem Hut, die eine Teilmenge der harmonischen Reihe bildet :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Nun bilden wir bei der harmonischen Reihe mit den Gliedern der zweiten Reihe Gruppen

$$1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots$$

und ersetzen jedes Glied einer Gruppe durch das jeweils kleinste.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)}_{\frac{1}{2}} + \dots$$

Bei dieser zweiten von uns konstruierten Reihe kann man mit Sicherheit sagen, dass jedes Teilglied maximal genauso groß ist, wie das entsprechende Glied der harmonischen Reihe. Daraus wiederum folgt, dass der Summenwert der harmonischen Reihe mindestens genauso groß ist, wie der unserer konstruierten Reihe. Und bei dieser gilt :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

Folglich ist die harmonische Reihe divergent. Zugegeben, dieses Ergebnis ist mehr als schwer zu verdauen, denn es bedeutet ja im Klartext, dass die harmonische Reihe, die schon nach 100 Gliedern nur noch um  $\frac{1}{100}$  wächst, jede noch so große Zahl irgendwann transzendiert. Aber so ist das wohl mit dem Unendlichen. So stelle ich mir gerade vor, ich würde für einen Tageslohn von  $\frac{1}{n}$  Euro arbeiten, wobei  $n$  den Tag beginnend bei 1 definiert. Ich bekäme also am ersten Tag einen Euro, am zweiten einen halben Euro, nach hundert Tagen nur noch einen Cent usw. Wäre ich weiterhin unsterblich und würde wie die Knechte im Mittelalter jeden Wochentag malochen, dann würde ich irgendwann so viele Euros mein Eigen nennen, dass selbst Fort Knox neben meinem Reichtum verblassen würde - auch wenn dieser Vorgang wohl annähernd  $2^{1000000000}$  Jahre dauern wird ...

*Noch eine kleine Anmerkung dazu :*

Laut MATHEMATICA<sup>©</sup> würden 29000 Tage Arbeit, dies entspricht  $\approx 80$  Jahren, einen Gesamtlohn von 10,85 Euro ergeben - doch bei einer Zeitspanne von  $2^{100000000}$  Tagen, auf die mein Rechner bei der Summenberechnung schnell mit einem *Buffer-Overflow* reagiert, wäre man schon ein waschechter Millionär - man muss nur lange genug roboten, dann klappt das schon.

□

### ✱ Wurzelkriterium

Das Wurzelkriterium besagt, dass wenn für die Glieder einer Reihe  $\sum_n a_n$  der Grenzwert der  $n$ -ten Wurzel von  $|a_n|$  existiert,

$$q := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

dann ist die Reihe für  $q < 1$  absolut konvergent und für  $q > 1$  divergent - wie beim Quotientenkriterium ist der Sonderfall  $q = 1$  nicht definiert.

### ★ Beispiel.

Untersucht wird folgende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

Die Reihe ist demnach absolut konvergent.

### ★ Beispiel.

Untersucht wird folgende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Demnach ist keine Entscheidung über Konvergenz möglich.

... Warum ist eigentlich der Limes von  $\sqrt[n]{|a_n|}$  ohne weitere Umformung Eins ???

Das kann man sich am besten so vorstellen : Für ein sehr großes  $n$ , sagen wir mal  $n = 1000$  würde gelten :  $\sqrt[1000]{\frac{1}{1000^2}} = \frac{1}{1000^{\frac{2}{1000}}} \approx 0,99$ . Für  $n \rightarrow \infty$  ist der Grenzwert schließlich 1.

### ✱ Majoranten- bzw. Minorantenkriterium

Ist  $\sum_n b_n$  eine konvergente Reihe, die Konvergenz muss allerdings bekannt sein, mit positiven Gliedern  $b_n > 0$ , und haben wir eine hinsichtlich der Konvergenz noch undefinierte Reihe  $\sum_n a_n$ , dann ist diese Reihe für  $|a_n| \leq b_n$  absolut konvergent.

Ist hingegen  $\sum_n b_n$  divergent mit  $b_n > 0$ , dann ist für den Fall  $a_n > b_n$  auch die Reihe  $\sum_n a_n$  divergent. Dieses Kriterium ist also recht aufwendig, da man immer eine bekannte Vergleichsreihe benötigt. Wenn allerdings das Wurzelkriterium versagt, wie es ein paar Zeilen vorher bei  $\sum_n \frac{1}{n^2}$  gezeigt wurde, sollte man vielleicht einen Versuch mit dem Majorantenkriterium wagen. Und das machen wir jetzt auch.

★ **Beispiel.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

Nun suchen wir eine passende Majorante, damit  $|a_k| \leq b_k$  gilt.

$$\left(b_n := \frac{1}{n(n-1)}\right) > \left(a_n = \frac{1}{n^2}\right)$$

Wenn wir jetzt noch zeigen, dass  $\sum_n b_n$  konvergiert, so konvergiert auch  $\sum_n a_n$ . Dazu formen wir die Reihe etwas um.

$$s_n = \sum_{n=2}^n \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Betrachten wir die Teilsummen, so fällt etwas verwertbares ins Auge : Bis auf das erste und letzte Glied heben sich alle anderen Glieder gegenseitig auf.

$$\sum_{n=2}^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

Und somit konvergiert auch unsere andere Reihe. Der Summenwert sei angegeben, wird aber nicht bewiesen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Im Allgemeinen gilt für Reihen, die solche Struktur zeigen :

$$\sum_n \frac{1}{n^\kappa} \begin{cases} \text{konvergent} & \kappa > 1 \\ \text{divergent} & \kappa < 1 \end{cases}$$

★ **Beispiel.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Diese Reihe ist *divergent*, denn wir nehmen die harmonische Reihe ( ... Divergenz bereits bewiesen ) als *Minorante*, so dass gilt :

$$a_n > b_n \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

### ✱ Leibnizsches Konvergenzkriterium

Das sog. Leibnizkriterium gilt für alternierende Reihen - also für Reihen deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind. Solche Reihen zeigen die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \dots$$

Das Kriterium besagt, dass eine alternierende konvergent ist, wenn die Beträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden, also  $|a_k| > |a_{k+1}|$

- $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

### ★ Beispiele.

- Wir betrachten die folgende alternierende Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

Sie ist *konvergent*, denn beide Kriterien sind gültig :

$$\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \dots > \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} \right| = 0$$

- Nun betrachten wir eine andere alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2n+1}$$

Diese Reihe ist *divergent*, denn sie bildet keine Nullfolge.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{2n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \right| = \frac{1}{2}$$

## 10 Die komplexen Zahlen

Mit fortschreitenden Anforderungen wurden die Zahlenmengen im Laufe der Geschichte immer mehr erweitert. Einst sah man die Notwendigkeit einer negativen Zahl, es wurden Zahlen gebrochen und auch die Existenz irrationaler Zahlen sollte bald in eine Menge integriert werden. So wurden bestehende Zahlenmengen um neue Elemente erweitert – ähnlich dem javaschen Prinzip der Klassenvererbung – und zu einer neuen Menge definiert. Durch die Einführung der komplexen Zahlen ist diese Erweiterung unseres heiligen Zahlensystems vorerst abgeschlossen.

### 10.1 Definition einer komplexen Zahl

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  erweitert die reellen Zahlen um die imaginären Zahlen. Eine komplexe Zahl setzt sich aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammen. Als Einleitung versuche man folgende Gleichung zu lösen.

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 = -1$$

Diese Gleichung hat in  $\mathbb{R}$  keine Lösung, da die Wurzel aus  $-1$  dort nicht definiert ist. Um nun aber doch eine Lösung zu finden, konstruieren wir eine neue zweidimensionale Zahl  $z$ , welche in der *Gaußschen Zahlenebene* aus zwei Komponenten besteht: Einem Realteil  $\operatorname{Re}(z)$ , der aus einer reellen Zahl besteht, und einem Imaginärteil  $\operatorname{Im}(z)$ , der aus dem formalen Produkt einer reellen Zahl mit der imaginären Einheit  $i$  besteht. Die imaginäre Einheit ist als Wurzel aus  $-1$  definiert.

$$i = \sqrt{-1}$$

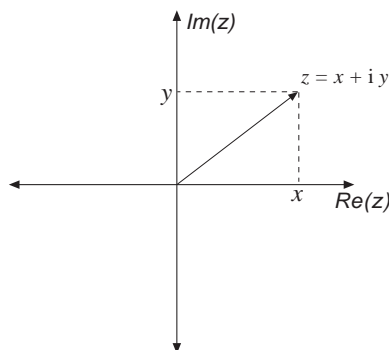
$$i^2 = -1$$

Mit diesen Definitionen lassen sich nun Zahl und Menge auch formal konstruieren. Dabei ist  $x$  der Real- und  $iy$  der Imaginärteil der komplexen Zahl.

$$z := x + iy$$

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

Diese Form der Darstellung wird die kartesische Darstellungsform einer komplexen Zahl genannt – kartesisch, weil man sie zweidimensional als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene darstellen kann. Man betrachte die nun folgende Abbildung.



Die Abbildung illustriert die kartesische Darstellung einer komplexen Zahl.

Man beachte, dass auch reelle Zahlen sich komplex ausdrücken lassen – einfach als komplexe Zahl ohne Imaginäranteil, d.h. der Imaginärteil muss zu null werden.



## 10.2 Operationen auf komplexen Zahlen

Die **Addition** zweier komplexer Zahlen ist komponentenweise definiert und nicht weiter schwierig. Die **Multiplikation** folgt denselben Gesetzen, den auch „normale“ Terme folgen – man multipliziert aus und beachtet dabei lediglich die Beziehung  $i^2 = -1$ .

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2)$$

Das **neutrale Element** der Addition und Multiplikation ist keine große Überraschung. Es sind fast dieselben Elemente wie bei allen anderen Zahlenmengen – der Unterschied ist die Zweidimensionalität der Zahl. Man kann sie daher auch als  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -Tupel notieren.

$$\text{additiv neutral:} \quad (0, 0) \Rightarrow (z + iy) + (0 + i0) = z + iy$$

$$\text{multiplikativ neutral:} \quad (1, 0) \Rightarrow (z + iy) \cdot (1 + i0) = z + iy$$

Beim **inversen Element** der Multiplikation wird eine komplexe Zahl  $\dot{z}$  gesucht, die als Produkt mit einer komplexen Zahl  $z$  stets das Einselement ergibt.

$$z \cdot \dot{z} = (1, 0)$$

Diese Zahl soll nun durch Ausmultiplizieren hergeleitet werden.

$$(x + iy) \cdot (\dot{x} + i\dot{y}) \stackrel{!}{=} 1 + i0$$

$$\underbrace{(x\dot{x} - y\dot{y})}_1 + i \cdot \underbrace{(\dot{x}y + x\dot{y})}_0 \stackrel{!}{=} 1 + i0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x\dot{x} - y\dot{y} = 1$$

$$\dot{x}y + x\dot{y} = 0$$

Jetzt werden die zwei Gleichungen erweitert, umgeformt und gleichgesetzt, so dass am Ende  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  isoliert werden – denn genau jene Zahlen sind gesucht.

$$x\dot{x} - y\dot{y} = 1 \quad (\cdot x) \Rightarrow x^2\dot{x} - xy\dot{y} = x$$

$$\dot{x}y + x\dot{y} = 0 \quad (\cdot y) \Rightarrow \dot{x}y^2 + xy\dot{y} = 0$$

$$xy\dot{y} = x^2\dot{x} - x$$

$$xy\dot{y} = -\dot{x}y^2$$

$$x^2\dot{x} - x = -\dot{x}y^2$$

Nach etwas Umformung gelangt man schließlich zur ersten gesuchten Komponente  $\dot{x}$ .

$$x = x^2\dot{x} + \dot{x}y^2$$

$$x = \dot{x}(x^2 + y^2)$$

$$\dot{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Die erste Komponente ist gefunden, doch die zweite fehlt noch. Dazu gehen wir analog vor und wenden denselben Weg der Herleitung an.

$$\begin{aligned} x\dot{x} - y\dot{y} &= 1(\cdot y) \Rightarrow x\dot{x}y - y^2\dot{y} = y \\ \dot{x}y + x\dot{y} &= 0(\cdot x) \Rightarrow x\dot{x}y + x^2\dot{y} = 0 \\ x\dot{x}y &= y + y^2\dot{y} \\ x\dot{x}y &= -x^2\dot{y} \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen werden wieder gleichgesetzt, so dass am Ende  $\dot{y}$  isoliert wird.

$$\begin{aligned} y^2\dot{y} + y &= -x^2\dot{y} \\ \dot{y}(x^2 + y^2) &= -y \\ \dot{y} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Es existiert somit tatsächlich ein inverses Elementes in  $\mathbb{C}$ . Bezeichnet wird die inverse komplexe Zahl mit  $z^{-1}$ .

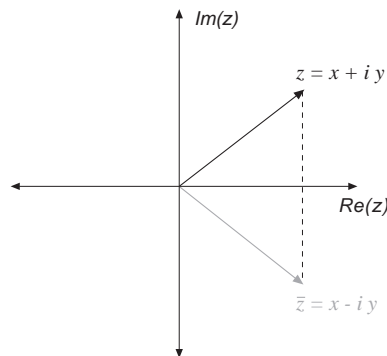
$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Vertrauen ist im Leben bekanntlich gut, doch Überprüfung ist in der Mathematik immer besser. Darum erwecken wir nun eine beliebige komplexe Zahl zum Leben, sagen wir  $z = 2 + 4i$ , und multiplizieren sie mit ihrem Inversen. Ob tatsächlich das neutrale Element erscheint?

$$\begin{aligned} z &= 2 + 4i \\ z^{-1} &= \frac{2}{4+16} - i \frac{4}{4+16} \\ z^{-1} &= \frac{1}{10} - i \frac{2}{10} \\ z \cdot z^{-1} &= (2 + i4) \cdot \left(\frac{1}{10} - i \frac{2}{10}\right) \\ z \cdot z^{-1} &= \left(\frac{2}{10} - i^2 \frac{8}{10}\right) - i \cdot \frac{4}{10} + i \cdot \frac{4}{10} \\ z \cdot z^{-1} &= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} = 1 \end{aligned}$$

...Na also, geht doch. War doch gar nicht so wild, oder? Eine weitere Besonderheit der komplexen Zahlen fehlt noch. Es ist die **konjugiert komplexe Zahl**  $\bar{z}$ , die an der reellen Achse gespiegelt ist und man wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} z &= x + yi \\ \bar{z} &:= x - yi \end{aligned}$$



Die Abbildung zeigt die konjugiert komplexe Zahl  $\bar{z}$ .

Wie man unschwer erkennt, bleibt der Realteil gleich und der Imaginärteil ändert sich im Vorzeichen. Eben genau darum ist die konjugiert komplexe Zahl an der reellen Achse gespiegelt. Daraus ergeben sich einige mehr oder minder interessante Eigenschaften.

- $z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Fehlt noch die **Division zweier komplexer Zahlen**. Stehen zwei komplexe Zahlen zur Division bereit, so kann sich die Division durch den Imaginärteil als problematisch erweisen. Was ist zu tun? ... Der Nenner wird reell! Und zwar durch die sog. konjugiert komplexe Erweiterung – was in etwa der dritten binomischen Formel entspricht, natürlich unter Berücksichtigung von  $i^2 = -1$ .

$$\frac{z}{\dot{z}} = \frac{x + yi}{\dot{x} + \dot{y}i} = \frac{(x + yi) \cdot (\dot{x} - \dot{y}i)}{(\dot{x} + \dot{y}i) \cdot (\dot{x} - \dot{y}i)}$$

Unten passt die dritte binomische Formel und oben wird komplex multipliziert.

$$\frac{z}{\dot{z}} = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y}) + i \cdot (y\dot{x} - x\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Dazu soll nun ein Beispiel folgen, welches den Zusammenhang etwas ins Gedächtnis einbrennen soll. Sei  $z = 2 - i$  und  $\dot{z} = -1 + i$ , dann gilt für die Division.

$$\begin{aligned} \frac{z}{\dot{z}} &= \frac{2-i}{-1+i} \\ &= \frac{(2-i) \cdot (-1-i)}{(-1+i) \cdot (-1-i)} \\ &= \frac{-2-2i+i+i^2}{1+1} = \frac{-3-i}{2} \\ &= -\frac{3}{2} - i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 10.3 Körperstruktur der komplexen Zahlen

Da in  $\mathbb{C}$  die geforderten Additions- und Multiplikationsgesetze gelten – denn Summe, Differenz, Produkt und Quotient ( $q \neq 0$ ) zweier komplexer Zahlen ergeben wiederum eine komplexe Zahl –, kann man, wenn auch die anderen Körperaxiome in  $\mathbb{C}$  gelten, von einem Körper sprechen. Und sie gelten.

Additionsgesetze

$$(+)\quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- $\exists z \in \mathbb{C}, z + z^{-1} \mapsto \mathbf{e} : -z$

Multiplikationsgesetze

$$(\cdot)\quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

- $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- $\exists z \in \mathbb{C}, z \cdot z^{-1} \mapsto \mathbf{e} : \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$

Distributivgesetz

$$\cdot \quad z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Neben den *rationalen* und *reellen* Zahlen bilden also auch die *komplexen* Zahlen einen Körper. Man sollte aber nicht fälschlicherweise annehmen, mit der Einbettung von  $\mathbb{C}$  sei bereits alles zum Thema „Körper“ gesagt. Auf die Existenz von *Schiefkörpern* und ähnlichen Kuriositäten soll hier nicht weiter eingegangen werden, dafür gibt es dann die entsprechende Fachliteratur.

### 10.4 Trigonometrische Darstellung

Neben der *kartesischen Form* einer komplexen Zahl existiert weiterhin die Darstellung in der *Polarform*. Hier wird die komplexe Zahl, die einen Punkt in der Zahlenebene darstellt, nicht durch den Imaginär- und Realteil, sondern durch den Abstand zum Ursprung, also dem Radius  $r$ , und dem dazugehörigen Winkel  $\varphi$  zwischen  $r$  und  $\text{Re}(z)$  beschrieben. Aus der Geometrie folgt für den Radius.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sind Radius und Realteil bekannt, so kann über den Kosinus der Winkel  $\varphi$  berechnet werden. Zur Erinnerung: Der Kosinus eines Winkels berechnet sich durch den Quotienten aus Ankathete und Hypotenuse.

$$\cos \varphi = \left( \frac{x}{r} \right) \Rightarrow \varphi = \pm \arccos \left( \frac{x}{r} \right)$$

Eine beliebige komplexe Zahl  $z$  kann also, wenn man die reale Komponente über den Kosinus und die imaginäre Einheit über den Sinus ausdrückt, in der nachfolgenden trigonometrischen Form ausgedrückt werden.

$$z = x + yi \Rightarrow (r \cdot \cos \varphi) + i \cdot (r \cdot \sin \varphi)$$

Der Radius lässt sich ausklammern und durch  $|z|$  ersetzen – eben weil Radius und Betrag einer komplexen Zahl identisch sind. Dadurch erhält man die sog. trigonometrische bzw. Polarform einer komplexen Zahl  $z$ .

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Im Vergleich zur kartesischen Multiplikation geht die **Multiplikation** in der Polarform relativ schnell. Hier werden die Beträge bzw. Radien miteinander multipliziert und die Winkel addiert. Das soll an zwei komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  demonstriert werden.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \\ z_2 &= x_2 + iy_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Multiplikation beider Zahlen nach etwas Umformung.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i \cdot (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Um etwas Praxis mit dieser „neuen“ Form zu erlangen, soll die Multiplikation zweier Polarformen an einem Beispiel exerziert werden. Dazu wandeln wir zuerst in die Polarform um, multiplizieren, um anschließend das Ergebnis wieder zurück in die kartesische Form zu bringen.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i &= \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ) \\ z_2 &= \sqrt{2} \cdot i &= \sqrt{2} (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ) \\ z_1 \cdot z_2 &= (1 + i)(i\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^2 (\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ) \\ z_1 \cdot z_2 &= 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \end{aligned}$$

## 10.5 Die Eulersche Beziehung

Die trigonometrische Form lässt sich auch verkürzt über die  $e$ -Funktion ausdrücken. Dazu muss allerdings etwas vom späteren Kapitel über *Potenz- und Taylorreihen* vor-gegriffen werden. Demnach lässt sich die  $e$ -Funktion über eine Potenzreihe entwickeln.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ersetzt man  $x$  mit  $i\varphi$ , so hat die Reihe plötzlich eine äußerst nützliche Gestalt.

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = 1 + \frac{(i\varphi)^1}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots$$

Aufgrund der komplexen Beziehung  $i^2 = -1$  erhält man eine alternierende Reihe, die sich genau so umformen lässt, dass man zufälligerweise die trigonometrischen Potenzreihen für die Sinus- und Kosinusfunktion erhält.

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \mp \dots\right)}_{\cos \varphi} + i \cdot \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots\right)}_{\sin \varphi}$$

Was wir damit erhalten haben ist nichts anderes als die zweite Komponente in der trigonometrischen Form einer komplexen Zahl.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

Eine komplexe Zahl kann somit vereinfacht und verkürzt dank der Hilfe der „eulerschen Beziehung“ dargestellt werden. Bei der konjugiert komplexen Zahl muss das Vorzeichen im Exponenten geändert werden.

$$\begin{aligned} z &= r \cdot e^{i\varphi} \\ z &= |z| \cdot e^{i\varphi} \\ \bar{z} &= \overline{[r \cdot e^{i\varphi}]} = r \cdot e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur reellen  $e$ -Funktion ist die komplexe  $e$ -Funktion periodisch mit der Periode  $2\pi i$ . Daraus folgt im Einheitskreis folgender Zusammenhang.

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= i \\ e^{i\pi} &= -1 \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} &= -i \\ e^{i2\pi} &= 1 \end{aligned}$$

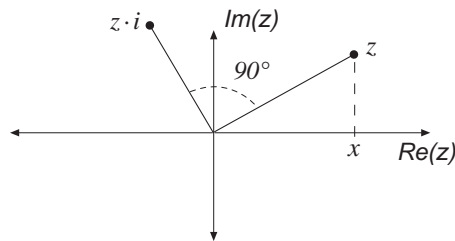
Die Multiplikation von komplexen Zahlen ist hier besonders komfortabel.

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Zwei komplexe Zahlen in der Exponentialform werden demnach multipliziert, indem ihre Beträge bzw. Radien miteinander multipliziert und ihre Argumente, d.h. Winkel, miteinander addiert werden. Die Division ist ähnlich bequem zu lösen.

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right) (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Multipliziert man eine komplexe Zahl  $z$  mit der imaginären Einheit  $i$ , so bewirkt dies eine Drehung der Zahl um  $90^\circ$  in mathematisch positiver Richtung.



Die Abb. zeigt die Multiplikation von  $z$  mit der imaginären Einheit  $i$ .

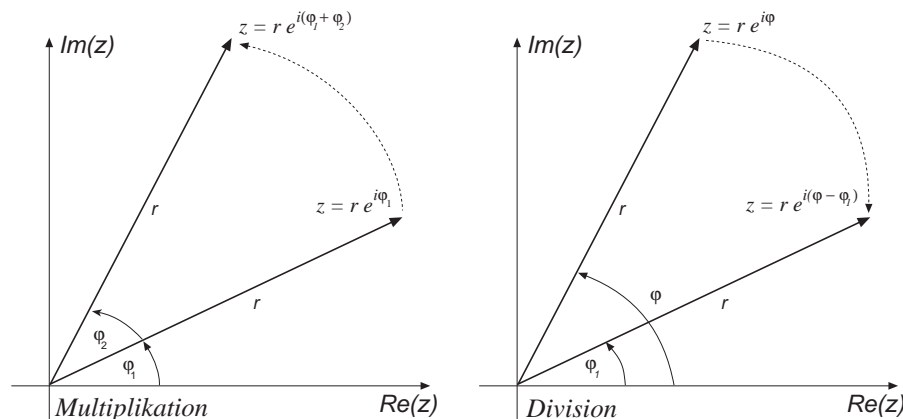
In der Exponentialform lässt sich dieser Zusammenhang relativ schnell herleiten, denn hier rotiert der komplexe Zeiger um  $\frac{\pi}{4}$  gegen den Uhrzeigersinn.

$$\begin{aligned} z \cdot i &= (|z| \cdot e^{i\varphi}) \cdot (1 \cdot e^{i90^\circ}) \\ &= |z| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= |z| \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Dividiert man eine komplexe Zahl  $z$  mit der imaginären Einheit  $i$ , so bewirkt dies eine Drehung der Zahl um  $90^\circ$  in mathematisch negativer Richtung, d.h. im Uhrzeigersinn.

$$\frac{z}{i} = \frac{|z|}{|1|} \cdot \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = |z| \cdot e^{i(\varphi - \frac{\pi}{4})}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Multiplikation und Division einer komplexen Zahl  $z$  mit einer weiteren komplexen Zahl vom Betrag Eins. Es soll verdeutlichen, dass sich in diesem Fall nur die Winkel ändern und der komplexe Zeiger von  $z$  bei einer fortlaufenden Änderung des Phasenwinkels  $\varphi$  einen Kreis beschreibt.



Die Abb. zeigt die Division und Multiplikation mit einer komplexen Zahl vom Betrag Eins.

## 10.6 Umrechnung zwischen der Darstellung einer komplexen Zahl

Bei vielen Operationen auf komplexen Zahlen ist oft die eine Darstellung der anderen Form vorzuziehen. So kann es mitunter empfehlenswert sein, wenn die komplexe Zahl vorher von der Polar- in die kartesische Form oder von der kartesischen in die Exponentialform transformiert wird.

### 10.6.1 Polarform in die kartesische Form

Seien  $r$  und  $\varphi$  gegeben, so lässt sich eine komplexe Zahl von der trigonometrischen in die kartesische Form zurückführen – mit Hilfe von Transformationsgleichungen.

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Liegt die komplexe Zahl hingegen in der Exponentialform vor, so muss sie natürlich zuerst in die trigonometrische Form gebracht werden.

$$\begin{aligned} z &= r \cdot e^{i\varphi} \\ &= r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \\ &= (r \cdot \cos \varphi) + i \cdot (r \cdot \sin \varphi) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

### 10.6.2 Kartesische Form in die Polarform

Zur Transformation der kartesischen Form in die Polarform wird einerseits der Winkel  $\varphi$  und der Betrag bzw. Radius von  $z$  benötigt. Diese Werte lassen sich schnell finden.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Beachten muss man hier allerdings, dass der jeweilige Quadrant, in dem sich die komplexe Zahl  $z$  befindet, eine besondere Rolle spielt. So muss zum Winkel  $\varphi$ , sollte sich die komplexe Zahl im zweiten oder dritten Quadranten befinden,  $\pi$  bzw., falls sie sich im vierten Quadranten befindet,  $2\pi$  addiert werden.

Quadrant	I	II, III	IV
$\varphi$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$

An drei prägnanten Beispielen werden komplexe Zahlen transformiert. Dabei wird bei den ersten beiden Beispielen eine komplexe Zahl der Polarform in die kartesische Form und beim dritten Beispiel eine komplexe Zahl in die Exponentialform gebracht.

$$\text{I. } z = 4 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= z = 4(0 + i \cdot 1)$$

$$= 4i$$

$$\text{II. } z = 12 \cdot e^{-i120^\circ}$$

$$= 12(\cos(-120^\circ) + i \cdot \sin(-120^\circ))$$

$$= -6 - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$\text{III. } z = 4 - 4i$$

$$r = \sqrt{4^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{32}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-4}{4}\right) + 2\pi$$

$$= \arctan(-1) + 2\pi$$

$$= \frac{7}{4}\pi$$

$$z = \sqrt{32} \left( \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) \right)$$

$$= 4\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

Am letzten Beispiel erkennt man, da sich die komplexe Zahl  $z$  im vierten Quadranten befindet, dass bei der Winkelberechnung der Quadrant seinen Einfluss hinterlassen hat.



## 10.7 Komplexe Lösungsmengen algebraischer Gleichungen

Für algebraische Gleichungen  $n$ -ten Grades galt bisher, dass sie höchstens  $n$  reelle Lösungen haben. Nun können wir aber auch komplexe Lösungen zulassen, so dass eine algebraische Gleichung  $n$ -ter Ordnung vom folgenden Typ stets  $n$  Lösungen in  $\mathbb{C}$  hat – darunter fallen auch die reellen Lösungen, da  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ .

$$\sum_{i=0}^n a_i x_i^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

Betrachten wir dazu die Gleichung  $z^2 + 1 = 0$ , die bekanntlich im Reellen keine Lösung hat, mit der komplexen Lösungsmenge  $i$ . Laut obiger Aussage existieren allerdings *zwei* Lösungen in  $\mathbb{C}$ . Wir erinnern uns an das heilig-hilfreiche *Horner Schema* und dividieren damit die Gleichung durch die erste Lösung  $z_1 = i$ . Für die Gleichung gilt:

$$(1) \cdot z^2 + (0) \cdot z^1 + (1) \cdot z^0$$

$$(z_1 = i) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline & i & -1 \\ \hline 1 & i & 0 \\ \hline \end{array}$$

Daraus folgt für die erste reduzierte Gleichung  $z + i = 0$  und somit  $z_2 = -i$ . Die Gleichung hat demnach die *zwei* Lösungen  $\{i, -i\}$ . Um das nun noch ein wenig zu vertiefen, geschieht dieser Akt mit einer algebraischen Gleichung dritter Ordnung.

$$z^3 - 1 = 0$$

Die erste *reelle* Lösung springt sofort ins Auge, doch neben dieser müssen noch zwei weitere Lösungen existieren. Es walte das Schema nach Horner.

$$\frac{(1) \cdot z^3 + (0) \cdot z^2 + (0) \cdot z^1 - (1) \cdot z^0}{z - 1}$$

$$(z_1 = 1) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Daraus folgt als Lösung die quadratische Gleichung  $z^2 + z + 1 = 0$ , welche nun mit der *pq*-Formel gelöst wird. Man beachte dabei, dass aus einer negativen Wurzel stets  $\sqrt{-1}$ , also nichts weiter als  $i$ , herausgezogen werden kann.

$$\begin{aligned} pq &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \\ z_{2,3} &= -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

Es existieren also tatsächlich genau drei Lösungen in  $\mathbb{C}$ , welche wir dank Horner Schema und *pq*-Formel herausfinden konnten. Doch wie steht es mit höheren Potenzen?

Bleiben wir bei dieser Gleichungsform und betrachten alle Lösungsmengen bis hin zur fünften Potenz, bei der nach dem fundamentalen Satz der Algebra genau fünf Lösungen existieren müssen. Die ersten beiden sind trivial, die dritte wurde soeben errechnet und bei der vierten Lösung formen wir die Gleichung  $z^4 - 1$  einfach zu  $(z^2 - 1)(z^2 + 1)$  um.

$z^1 = 1$	$\mathbb{L} = \{1\}$
$z^2 = 1$	$\mathbb{L} = \{1, -1\}$
$z^3 = 1$	$\mathbb{L} = \left\{1, \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right\}$
$z^4 = 1$	$\mathbb{L} = \{1, -1, i, -i\}$
$z^5 = 1$	??

Doch wie geht man bei  $z^5 - 1 = 0$  vor? Hier fehlt fürs Hornerschema der entscheidende Linearfaktor – die Berechnung wäre auch sonst mit allerlei Aufwand verbunden –, doch geometrisch sieht die Sache schon ganz anders aus. Man betrachte bitte noch einmal die Lösungsmengen bis zur vierten Potenz, stelle sie sich im Einheitskreis vor, frage sich, ob denn nicht etwas auffällt und gelange so schleichend zum Schluss, dass sich der Einheitskreis durch die komplexen Lösungen in  $n$ , wobei  $n$  der Potenz entspricht, gleichgroße Winkel, beginnend beim reellen  $(1, 0)$ , aufteilend lässt. Formen wir darum unsere gesuchte komplexe Zahl  $z^5$  erst einmal in die Exponentialform um.

$$z^5 = (|z| \cdot e^{i\varphi})^5 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

Jetzt muss unsere komplexe Zahl so modifiziert werden, dass sie in der fünften Potenz zu  $(1, 0)$  wird. Aber das ist doch eigentlich gar nicht so schwer, oder?

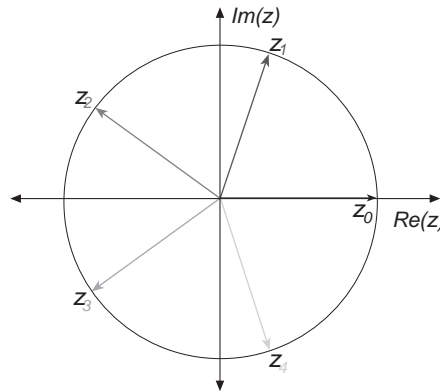
$$(1 \cdot e^{i \cdot k \cdot \frac{2}{5}\pi})^5 = 1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Der Betrag Eins ändert sich beim Potenzieren nicht und  $5 \cdot \frac{2}{5}\pi$  ergibt, da Winkel beim Multiplizieren addiert werden, einen vollen Umlauf – also nichts anderes als  $2\pi$  –, so dass der Zeiger der komplexen Zahl sich nach einer Umdrehung wieder auf der reellen Achse bei  $(1, 0)$  befindet. Bitte beachten, dass sich für  $k \geq n$  bzw.  $k < 0$  die Lösungen wiederholen, so dass maximal *fünf verschiedene* Lösungen existieren. Gut, nach diesem Gedankenspiel sollen jetzt alle fünf Lösungen von  $x^5 = 1$  erfasst werden. Los geht's mit der trigonometrischen Form, für  $\varphi$  gilt wegen der Periodizität folgende Formel.

$$k \cdot \varphi = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$$

Der Winkel  $\alpha$  ist hier der Hilfswinkel zur Berechnung von  $\varphi$ . Er wird durch die Formel  $\alpha = \arctan \frac{y}{x}$  im Bogenmaß berechnet. Bei diesem Beispiel ist er gleich null, da  $\arctan 0$  gleich null ist. Bei weniger trivialen Gleichungen muss er aber mit eingebaut werden.

Die nun folgende Abbildung offenbart genau das, was wir durch die Lösungsmengen der ersten vier Potenzen bereits vermutet hatten. Der Einheitskreis teilt sich in fünf gleich große Winkel auf, wobei die erste Lösung logischerweise stets das reelle Tupel  $(1, 0)$  ist und der Rest sich aus komplexen Lösungen zusammensetzt.



Die Abb. illustriert die komplexen Lösungen von  $z^5 = 1$ .

Da uns auch die Lösungen in der kartesischen Form interessieren, sollen diese noch durch die Umrechnung mit angegeben werden. Da die jeweiligen Winkel bekannt sind, geht dies über die trigonometrische Form sehr einfach.

$$\begin{aligned}
 z_k &= \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \\
 k=0 \quad z_0 &= \cos 0 + i \cdot \sin 0 &= 1,00 + 0,00i \\
 k=1 \quad z_1 &= \cos\left(\frac{2}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\right) &= 0,31 + 0,95i \\
 k=2 \quad z_2 &= \cos\left(\frac{4}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4}{5}\right) &= -0,81 + 0,59i \\
 k=3 \quad z_3 &= \cos\left(\frac{6}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{6}{5}\right) &= -0,81 - 0,59i \\
 k=4 \quad z_4 &= \cos\left(\frac{8}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{8}{5}\right) &= 0,31 - 0,95i
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend seien hier alle nötigen Schritte erwähnt, um die Lösungsmenge einer komplexen Gleichung  $n$ -ten Grades zu erhalten. Liegt eine komplexe Gleichung in der kartesischen Form vor, so muss sie zuerst in die Exponentialform gebracht werden.

$$z^n = x + iy$$

Für den Betrag gilt die Standardformel  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Da allerdings die Potenz berücksichtigt werden muss, wird der Betrag entsprechend modifiziert.

$$\dot{r} = \sqrt[n]{r}$$

Analog muss auch der Winkel  $\varphi$  angepasst werden, welcher sich über den bereits angesprochenen Hilfsinkel  $\alpha = \arctan \frac{y}{x}$  berechnen lässt.

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \quad k_0, k_1, k_2, \dots, k_{(n-1)}$$

Schließlich werden die Lösungen  $z_0$  bis  $z_{(n-1)}$  über die modifizierte trigonometrische Form der komplexen Zahl berechnet und man erhält so die Lösungen.

$$z_k = \dot{r} \cdot (\cos \dot{\varphi} + i \cdot \sin \dot{\varphi})$$

## 11 Die analytische Geometrie der Ebene

### 11.1 Implizite und explizite Darstellungsform einer Gleichung

Generell lassen sich Kurven in Abhängigkeit durch einen Parameter darstellen. Dieser kann für die Zeit ( $t$ ), die Länge ( $s$ ), die Geschwindigkeit ( $v$ ) oder für irgendeine andere veränderliche Größe stehen. Die Parameterdarstellung zeigt dann folgende Form :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Das kann sowohl im kartesischen Koordinatensystem  $\mathbb{R}^2$ , als auch in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  geschehen.

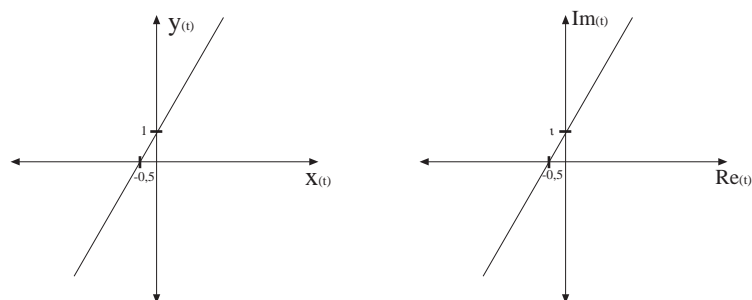
$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

Das sei dann im Folgenden bei den beiden Abbildungen bildlich dargestellt. Die Parameterdarstellung lautet

$$x(t) = t \quad y(t) = 2t + 1 \quad t \in \mathbb{R}$$

und in der expliziten Form sähe die Gleichung so aus :

$$y = 2x + 1$$



Um eine **implizite** Gleichung zu erhalten, müssen die Parameter eliminiert werden.

$$F(x, y) = 0$$

Dazu ein Beispiel :

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$$

Wir machen uns eine Eigenschaft der Geometrie zunutze, um die Gleichung daraufhin in der impliziten Form darzustellen.

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Die **explizite** Form müsste wohl aus der Schulzeit noch halbwegs-umfassend bekannt sein - wer hat in der Oberstufe nicht bis zum Anschlag Gleichungen wie

$$\ll f(x) = x^2 \gg$$

auf- und abgeleitet ( ... geleitet ) und sich später gewundert, dass an Hochschulen und Universitäten eine völlig andere Mathematik praktiziert wird ?

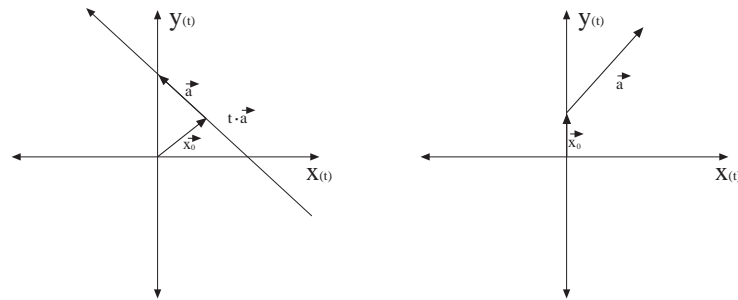
## 11.2 Geraden

Aus der Schule sind Geraden noch weitestgehend als lineare Funktionen der Form

$$f(x) = m \cdot x + b$$

bekannt, wobei  $m$  die Steigung und  $b$  den Achsenabschnitt repräsentiert. Nun sollen Geraden auch als Vektoren definiert werden :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_o + t \cdot \vec{a}$$



Für die linke Abbildung gilt die allgemeine Form einer Geraden in Vektorform :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{x}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Rechts befindet sich eine beispielhafte Abbildung folgender Art :

$$\vec{x} \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nun soll aus der Parameterdarstellung die implizite und explizite Form einer Geraden hergeleitet werden. Es gilt :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_o + t \cdot \vec{a}$$

$$\vec{x}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_o + t \cdot a \\ y = y_o + t \cdot b \end{cases}$$

Übrigens sollte bei der Darstellung im Komplexen die entsprechenden Eigenschaften berücksichtigt werden, daher sei hier als kurzer Einschub die komplexe Darstellung von Geraden angeführt.

$$z(t) = x_o + \imath y_o + t(a + \imath b) \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = x_o + ta + \imath(y_o + tb)$$

So viel dazu, nun zurück zur Umwandlung in die explizite Form. Dazu muss  $t$  eliminiert werden :

$$Ax + By + C = 0$$

Und für  $B \neq 0$  erhalten wir die allseits bekannte explizite Form einer Geraden.

$$y = mx + s$$

Der einzige Unterschied besteht darin, dass der Achsenabschnitt hier nicht mit  $b$ , sondern mit  $s$  deklariert wird. Aber das sollte uns nicht weiter stören - es ist lediglich nur ein Statthalter, der von findigen Definitionisten genauso gut  $p$ ,  $\delta$  oder *lila Kuh* hätte getauft werden könnte.

### ★ Beispiel.

Wir wollen ein wenig den Umgang mit den neuen Gegebenheiten üben und suchen Parameterdarstellung, komplexe Darstellung und natürlich auch die implizite und explizite Form einer Geraden ... Los geht's !

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fangen wir also mit der *Parameterdarstellung* an.

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2t \\ y(t) = 1 + t \end{cases}$$

Nun zur *komplexen* Darstellung, diese lautet wie folgt :

$$\begin{aligned} z(t) &= (3 + i) + t(-2 + i) \\ &\Leftrightarrow \\ z(t) &= 3 - 2t + i(1 + t) \end{aligned}$$

Nun wird  $t$  aus der Parameterdarstellung eliminiert.

$$t = \frac{3 - x}{2} \quad t = y - 1$$

Daraus lässt sich die *implizite* Form konstruieren und umformen ...

$$\frac{3 - x}{2} - y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 5 = 0$$

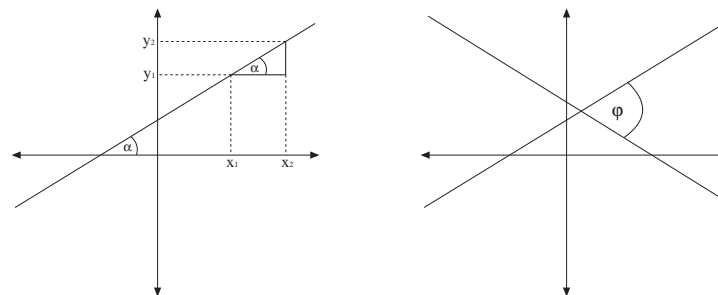
... um letztendlich auch die *explizite* Form der Geraden zu erhalten.

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

★ DER RICHTUNGSWINKEL  $\alpha$ 

Nun etwas Elementargeometrie. Die linke Abbildung zeigt eine der Möglichkeiten, um den Winkel  $\alpha$  zwischen einer beliebigen Geraden und der Abszisse - oder einer Geraden parallel zur Abszisse.

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \implies \alpha = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Bei der rechten Abbildung seien zwei beliebige Geraden gegeben,

$$y_1 = mx + s_1 \quad y_2 = mx + s_2$$

die sich schneiden und somit den Winkel  $\varphi$  bilden. Dieser Winkel sei gesucht, und das geschieht mit der Formel :

$$\tan \varphi = \left( \tan(\alpha_2 - \alpha_1) \right) \implies \tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

## ★ Beispiel.

Gesucht ist der Schnittwinkel zweier Geraden.

$$y_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad y_2 = 2x + 1$$

Nach der soeben definierten Formel gilt :

$$\begin{aligned} \varphi &= \tan^{-1} \frac{2 - (-\frac{1}{2})}{1 + (-\frac{1}{2} \cdot 2)} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{2,5}{0} \simeq 90^\circ \end{aligned}$$

Division durch Null ist zwar nicht definiert, kann aber hier mit einer sehr großen Zahl angenähert werden, somit ist der Winkel  $90^\circ$ .

### 11.3 Kegelschnitte

Unter einem Kegelschnitt versteht man die Kurven, die durch Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene entstehen. Dazu zählen **Kreis**, **Ellipse**, **Hyperbel** und **Parabel**. Definieren kann man solche Kurven über algebraische Gleichungen 2. Grades.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

Die Koeffizienten  $A, B, C, D, E$  sind hier konstant<sup>32</sup> und entscheiden über die Struktur des jeweiligen Kegelschnittes.

$(A = B)$	Kreis
$(AB > 0, A \neq B)$	Ellipse
$(AB < 0)$	Hyperbel
$(A = 0, B \neq 0) \vee (A \neq 0, B = 0)$	Parabel

Daraus lässt sich folgern, dass bei identischen *Vorzeichen* der Koeffizienten  $A$  und  $B$  stets eine Ellipse<sup>33</sup> gebildet wird, bei unterschiedlichen Vorzeichen eine Hyperbel und beim Verschwinden eines Koeffizienten eine Parabel.

#### ★ KREIS

Unter einem Kreis versteht man die Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt  $M$  den gleichen Abstand  $r$  haben. Nach dem alten Pythagoras<sup>34</sup> kann man bei einem beliebigen Kreispunkt - sofern Kreismittelpunkt und Koordinatenursprung identisch sind - den Satz  $x^2 + y^2 = r^2$  anwenden, was dann auch die Mittelpunkts Gleichung des Kreises stellt. Diese Gleichung ist eigentlich recht gut zu verstehen, denn für einen beliebigen Kreis mit dem Mittelpunkt  $M = (0, 0)$  kennt man ja den Radius schon, sofern man natürlich den Schnittpunkt des Kreises mit der Ordinate oder Abszisse kennt. Ist nur ein einziger Punkt des Kreises bekannt, so wendet man den Satz des Pythagoras an - Punkt  $P(3, 5)$  würde beispielsweise zu einem Kreis mit dem Radius  $r = \sqrt{34} \approx 5,9$  gehören ... In vektorieller, komplexer und kartesischer Form sieht die allgemeine Kreisgleichung<sup>35</sup> dann so aus :

$$\text{Vektor} \quad |\vec{x} - \vec{x}_o| = r$$

$$\text{komplex} \quad |z - z_o| = r$$

$$\text{kartesisch} \quad (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

Es stellt sich die Frage, ob ein Polynom der allgemeinen Form einen Kreis bilden kann. Für die allgemeine Form gilt eine algebraische Gleichung 2.Ordnung :

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Ey + F = 0$$

<sup>32</sup>darum auch in großen Lettern

<sup>33</sup>Im Spezialfall  $(A = B)$  ein Kreis.

<sup>34</sup>Altgriechischer Philosoph und Mathematiker (580 - 496 v.Chr.)

<sup>35</sup>Für einen verschobenen Kreis, also für  $M = (x_o, y_o)$



Sie gilt mit der **Bedingung**  $C = 0$  und  $(A = B) \neq 0$ . Nach ein wenig Umformung und der Division durch  $A$  erhält man :

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Der Bruch  $\frac{B}{A}$  wird aufgrund der Bedingung gekürzt und dann wird versucht, das Gebilde der Struktur der kartesischen Kreisform anzunähern.

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = -\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$$

... Für den Mittelpunkt gilt :

$$x_o = -\frac{D}{2A} \quad y_o = -\frac{E}{2A}$$

... Und für den Radius :

$$r = \sqrt{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}}$$

★ **Beispiel.** für eine Kreisgleichung.

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y + u = 0$$

Die Gleichung wird durch 2 geteilt und durch quadratische Ergänzung umgeformt .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 8y + \frac{u}{2} &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 + \frac{u}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Somit entsteht die kartesische Kreisform, die in Abhängigkeit der Variablen  $u$  folgende Ergebnisse liefert :

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 - \frac{u}{2}$$

- $(u > 50) \Rightarrow \mathbb{L} = \{\emptyset\}$
- $(u = 50) \Rightarrow$  Ein Punkt mit den Koordinaten  $(3, -4)$
- $(u < 50) \Rightarrow$  Ein Kreis mit  $\mathbb{M} = (3, -4)$  und  $r = \sqrt{25 - \frac{u}{2}}$

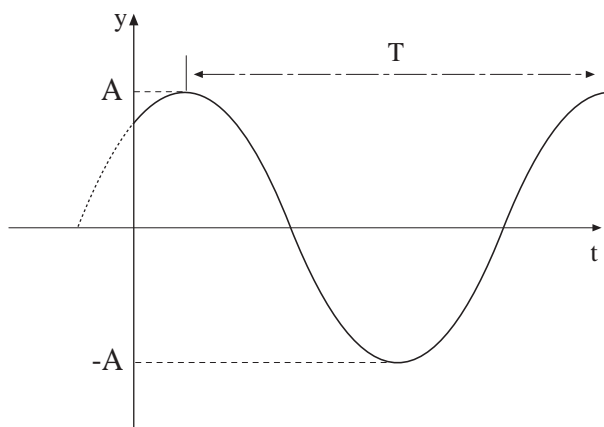
#### ✱ KOMPLEXE KREISDARSTELLUNG

Einen Kreis in der komplexen Ebene erhält man, indem man den Zeiger einer komplexen Zahl um  $360^\circ$  in positiver oder negativer Drehrichtung rotieren lässt. Soll der Kreis verschoben werden, so verschiebt man die Zahl  $z$  um den Vektor  $z_o$

### ✿ HARMONISCHE SCHWINGUNGEN

Bei einer harmonischen Schwingung betrachten wir zunächst eine von der Zeit  $t$  abhängige sinusförmige Größe.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$



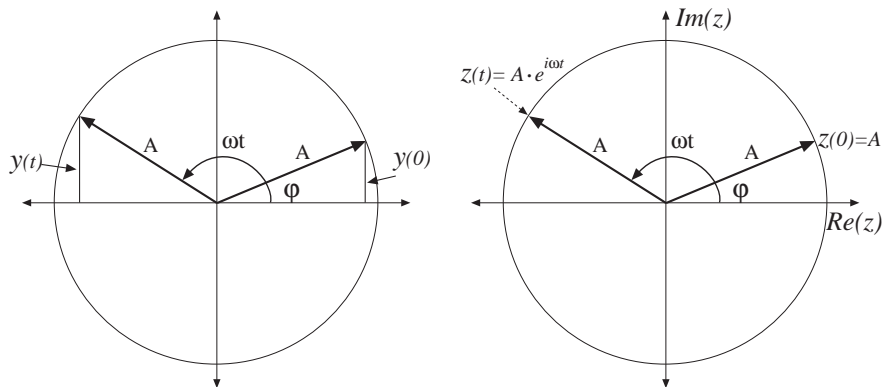
Definiert sind die Größen wie folgt :

- $A$  : Amplitude
- $\omega$  : Kreisfrequenz ( $\omega > 0$ )
- $\varphi$  : Phasenwinkel

Ferner bestehen noch die aus der Physik bekannten Zusammenhänge zwischen Periodendauer  $T$  , der Frequenz  $f$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad T = \frac{1}{f} \quad \omega = 2\pi f \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T}$$

Gut, nun lässt sich diese Funktion einer beliebigen harmonischen Schwingung - es kann sich beispielsweise um eine mechanische Schwingung oder um eine Wechselgröße aus der Elektrotechnik handeln - besonders anschaulich in einem Zeigerdiagramm per rotierendem Zeiger darstellen.



Der Zeiger befindet sich in der Ausgangsstellung ( $t = 0$ ) und wird somit durch den Phasenwinkel  $\varphi$  beschrieben. Nun verstreicht Zeit ( $t > 0$ ) und der Zeiger beginnt zu rotieren (positiver Drehsinn). Dies führt dazu, dass der Richtungswinkel gegenüber der Bezugsachse (hier die Zeitachse) nun  $\varphi + \omega t$  beträgt. Wie auch schon bei den trigonometrischen Grundlagen beschrieben wurde, entspricht der Ordinatenwert des jeweiligen Kreispunktes dem aktuellen Funktionswert  $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ .

Bei der rechten Abbildung betreten wir wieder einmal das Gebiet der komplexen Zahlen. Hier ist dann derselbe Vorgang in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt. Für die komplexe Zahl in Abhängigkeit von  $t$  sollten wir inzwischen die Formel locker hin- und herleiten können.

$$z(t) = A \left( \cos(\omega t + \varphi) + \imath \cdot \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

$$z(t) = A \cdot \mathbf{e}^{\imath(\omega t + \varphi)} \Leftrightarrow \underbrace{A \cdot \mathbf{e}^{\imath\varphi}}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot \underbrace{\mathbf{e}^{\imath\omega t}}_{\text{Zeitfunktion}}$$

Folglich besteht der Zeiger aus einem zeitabhängigen und einem zeitunabhängigen Faktor. Die komplexe Amplitude  $A$  in Verbindung mit dem Phasenwinkel  $\varphi$  legt somit die Anfangsstellung des Zeigers fest. Daraufhin beschreibt die Zeitfunktion  $\mathbf{e}^{\imath\omega t}$  die Rotation des Zeigers mit der Kreisfrequenz<sup>36</sup>  $\omega$

★ **Beispiel.** aus der Elektrotechnik.

Um zu zeigen, dass die komplexe Rechnung der reellen vorzuziehen ist, seien hier die Umwandlungen der Wechselspannung und der Wechselstromstärke gezeigt. Komplexe Größen werden hier mit einem Unterstrich hervorgehoben. Auch wird, um Verwechslungen mit der Wechselgröße<sup>37</sup>  $i$  zu vermeiden, in der Elektrotechnik die imaginäre Einheit mit  $j$  gekennzeichnet. Mit  $\hat{u}$  wird in den untenstehenden Gleichungen der *Scheitelwert* der Spannung bezeichnet. Dies entspricht dem maximalen Ausschlag von  $u$  - sozusagen der Amplitude. Der addierte Winkel  $\varphi$  ist der *Nullphasenwinkel*, denn bei einer Wechselgröße braucht der Periodenbeginn nicht unbedingt mit dem Beginn der Zeitzählung ( $t = 0$ ) zusammenfallen.

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{u}(t) = \underline{\hat{u}} \cdot \mathbf{e}^{j\omega t}$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\underline{i}(t) = \underline{\hat{i}} \cdot \mathbf{e}^{j\omega t}$$

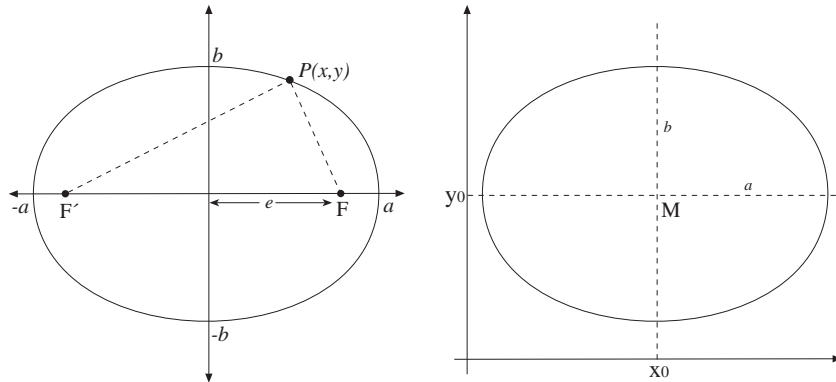
<sup>36</sup>neben der *Kreisfrequenz* spricht man auch von der *Winkelgeschwindigkeit*.

<sup>37</sup>Stromstärke in der Wechselstromtechnik

## ✧ ELLIPSE

Der Definition nach handelt es sich bei einer Ellipse um die Menge aller Punkte P, für die die Entfernung von zwei festen Punkten - den *Brennpunkten* - konstant mit  $2a$  ist.

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$$



$$\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos t \\ y(t) = b \cdot \sin t \end{cases}$$

Man bezeichnet  $a$  als die *Hauptachse* und  $b$  als die *Nebenachse*. Die Brennpunkte werden hier mit  $F$  und  $F'$  bezeichnet und der Abstand zwischen den Brennpunkten und dem Ursprung wird als *Brennweite*<sup>38</sup>  $e$  bezeichnet.

$$F = (e, 0) \quad F' = (-e, 0) \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Sei o.B.d.A.<sup>39</sup>  $a > b$ , dann gilt für die Schnittpunkte mit den Achsen :

$$(a, 0); (-a, 0); (0, b); (0, -b)$$

Wie beim Kreis lässt sich auch unterscheiden zwischen der Mittelpunkts- und Hauptform der Ellipsengleichung. Sind Ursprung des kartesischen Koordinatensystems und Mittelpunkt  $M = (0, 0)$  der Ellipse identisch, so lässt sich die Ellipse in der Mittelpunktsform angeben :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

In der Hauptform  $M = (x_o, y_o)$  wird dann eine eventuelle Verschiebung mit berücksichtigt.

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

<sup>38</sup>Die Brennweite  $e$  wird auch als **lineare Exzentrizität** bezeichnet.

<sup>39</sup>ohne Beachtung der Allgemeinheit

✕ *Beweis.*

Wir zeigen, dass die Mittelpunktsleichung der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ist. Dazu substituieren wir  $\overline{FP}$  und  $\overline{F'P}$  ...

$$\sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+e)^2 + (y+0)^2} = 2a$$

.. subtrahieren und quadrieren ...

$$\sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+e)^2 + (y+0)^2} \quad || (*)^2$$

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x+e)^2 + (y+0)^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2$$

... kürzen um und formen weg.

$$4a \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \underbrace{4ex + 4a^2}_{4(ex+a^2)} \quad | \frac{(*)}{4}, (*)^2$$

$$a^2((x+e)^2 + y^2) = e^2x^2 + 2exa^2 + a^4$$

$$a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) = e^2x^2 + 2exa^2 + a^4 \quad || - (2exa^2)$$

$$a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 = e^2x^2 + a^4$$

Nun nutzen wir die Eigenschaft der Brennweite  $e^2 = a^2 - b^2$  und substituieren  $e$ . Danach formen wir die Gleichung entsprechend um und erhalten die Mittelpunktsleichung für Ellipsen.

$$a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2 = (a^2 - b^2)x^2 + a^4$$

$$a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2 = a^2x^2 - b^2x^2 + a^4$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad || \frac{(*)}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

★ **Beispiel.**

Seien die Brennpunkte und ein Punkt der Ellipse gegeben, so lässt sich auch die passende Gleichung finden. Dazu brauchen wir  $a$  und  $b$ .

$$F' = (-1, 0) \quad F = (1, 0) \quad P(1, -\frac{3}{2})$$

Dazu setzt man  $x$  und  $y$  in die allgemeine Ellipsengleichung ein.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{9}{4}}{b^2} = 1$$

Aus dem Abstand der Brennpunkte folgt für die Brennweite

$$e = 1$$

und aus der Formel  $e^2 = a^2 - b^2$  folgt

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 1$$

Also gilt somit  $a^2 = 1 + b^2$ . Das machen wir uns zunutze und substituieren in der Ellipsengleichung  $a^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{\frac{9}{4}}{b^2} &= 1 & \| (*) \cdot b^2 \\ \frac{b^2}{1 + b^2} + \frac{9}{4} &= b^2 & \| (*) \cdot (1 + b^2) \\ b^2 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}b^2 &= \underbrace{a^2 b^2}_{b^2 + b^4} \\ b^4 - \frac{9}{4}b^2 - \frac{9}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Lösung mit Hilfe der Diskriminante.

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \frac{81}{16} + 4 \frac{9}{4} = \frac{225}{16} = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \\ b^2 &= \frac{\frac{9}{4} \pm \frac{15}{4}}{2} \end{aligned}$$

Somit haben wir die Lösung<sup>40</sup> für  $b$  erhalten :  $b^2 = 3$  Dieses  $b$  setzen wir nun in  $a$  ein und haben unsere Ellipsengleichung.

$$\begin{aligned} a^2 &= 1 + b^2 = 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

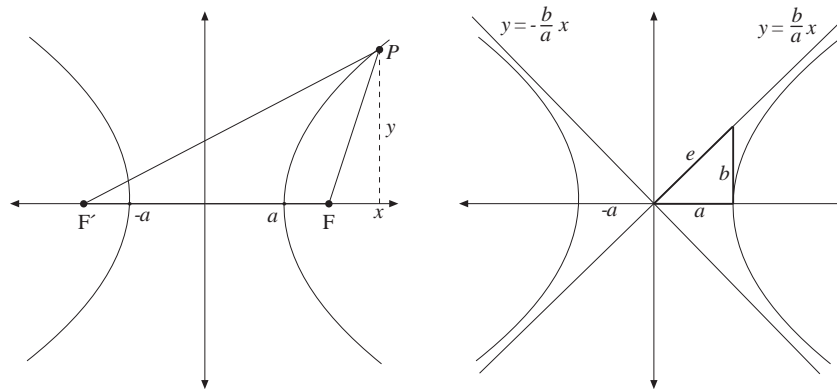
---

<sup>40</sup>Die **negative** Lösung interessiert uns nicht, da wir nur positive  $a$  und  $b$  gebrauchen können.

## ✧ HYPERBEL

Unter einer Hyperbel, versteht man die Menge aller Punkte  $P$ , für die der Absolutbetrag der Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten  $F$  und  $F'$ , konstant ist.

$$|\overline{FP} - \overline{F'P}| = 2a$$



Substituieren wir wieder die Abstandsformel, so erhalten wir - analog zur Herleitung der Ellipsengleichung - die Mittelpunktsleichung der Hyperbel.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für den Fall eines nicht mit dem Mittelpunkt identischen Ursprungs ... nun, das müsste wohl inzwischen nicht mehr explizit erwähnt werden ... Oder etwa doch ?

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

Für den Fall  $y = 0$  folgt  $x = \pm a$  und somit ist der Schnittpunkt der Hyperbel mit der Abszisse  $-a$  und  $a$ . Bei der rechten Abbildung sind zwei Geraden eingezeichnet, denen sich die Hyperbel asymptotisch nähert. Um dies zu zeigen, muss man die Hyperbelgleichung nach  $y$  auflösen.

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Das kann nun wiederum so umgeformt werden, dass  $x^2$  im Nenner unter der Wurzel steht.

$$y = \pm \left(\frac{b}{a}\right)x \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Und damit wurde das asymptotische Verhalten gezeigt, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} : \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = 1$$

$$y = \pm \left(\frac{b}{a}\right)x$$

Die Hyperbel in Parameterdarstellung zeigt übrigens folgende Form :

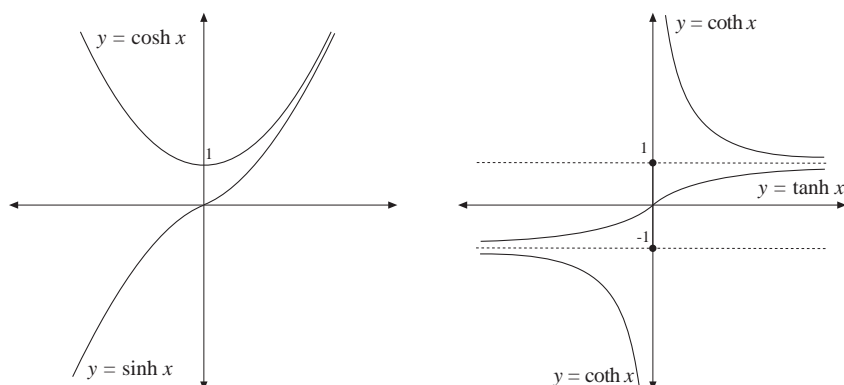
$$\begin{cases} x(t) = a \cdot \cosh t \\ y(t) = b \cdot \sinh t \end{cases}$$

## ✧ HYPERBELFUNKTIONEN

Die sog. *Hyperbelfunktionen* werden alle aus den Eulerschen Funktionen  $y = e^x$  und  $y = e^{-x}$  konstruiert und haben von ihrem Verhalten her auch eine gewisse Ähnlichkeit zu den bekannten trigonometrischen Funktionen.

Sinus hyperbolicus	$y = \sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$
Kosinus hyperbolicus	$y = \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$
Tangens hyperbolicus	$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Kotangens hyperbolicus	$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

In den nun folgenden Abbildungen kann man die vier Funktionen optisch betrachten und sich einen ersten Eindruck verschaffen.



Die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen sind hier noch einmal dargelegt.

	$y = \sinh x$	$y = \cosh x$	$y = \tanh x$	$y = \coth x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$ x  > 0$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$1 \leq y < \infty$	$-1 < y < 1$	$ y  > 1$
Nullstellen	$(0, 0)$	<i>keine</i>	$(0, 0)$	<i>keine</i>
Monotonie	$f(x_1) < f(x_2)$	—	$f(x_1) < f(x_2)$	—

Wie der aufmerksame Leser erkannt haben sollte, setzen sich die Funktionen von Tangens- und Kotangens hyperbolicus aus den anderen beiden zusammen.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$



Zuletzt sind da noch die interessanten *Additionstheoreme* für Hyperbelfunktionen.

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \cdot \sinh x_2$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \cdot \sinh x_2$$

$$\tanh(x_1 \pm x_2) = \frac{\tanh x_1 \pm \tanh x_2}{1 \pm \tanh x_1 \cdot \tanh x_2}$$

Aus denen lassen sich dann wiederum Beziehungen herleiten.

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x$
- $\cosh(2x) = \sinh^2 x + \cosh^2 x$

Die erste Beziehung soll dann auch kurz bewiesen werden. Dazu substituieren wir die Funktionen mit der allgemeinen Formel.

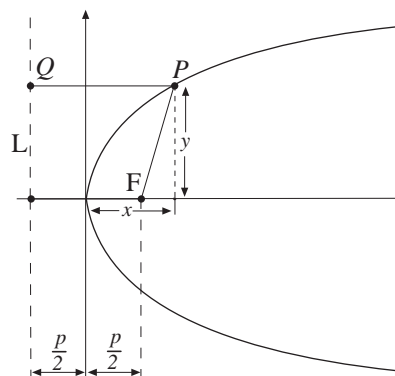
✕ *Beweis.*

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \underbrace{\frac{1}{4} \left( e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} \right) - \frac{1}{4} \left( e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x} \right)}_{\frac{1}{4} (2e^x e^{-x} + 2e^x e^{-x})} &= 1 \\ \underbrace{\frac{1}{4} \cdot 2(e^0 + e^0)}_1 &= 1 \end{aligned}$$

□

#### ★ PARABEL

Die Parabel ist definiert als die Menge aller Punkte  $P$ , deren Abstände von einem festen Punkt, dem Brennpunkt  $F$ , und einer festen Geraden, der sog. *Leitlinie*  $L$ , gleich sind. Der Abstand auf der Abszisse vom Brennpunkt zur Leitlinie  $\overline{FL}$  nennt sich *Halbparameter*  $p$ . In dem folgenden Bild ist dies verdeutlicht.



Nach der Definition  $\overline{PF} = \overline{PQ}$  kann nun wieder ordentlich substituiert werden.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

Das ganze wird nun ein wenig quadriert und auch etwas umgemixt.

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

Und daraus folgt nun die Gleichung für eine *nicht-verschobene* Parabel, die sog. *Scheiteltgleichung*.

$$y^2 = 2px$$

Zu beachten ist hier, dass für  $x > 0$  die Parabel nach rechts geöffnet ist - wie in der Abbildung - und für  $x < 0$  ist sie nach links geöffnet. Um die bekannte Parabel  $y = x^2$  aus der Schule zu erhalten, werden die Variablen ausgetauscht,

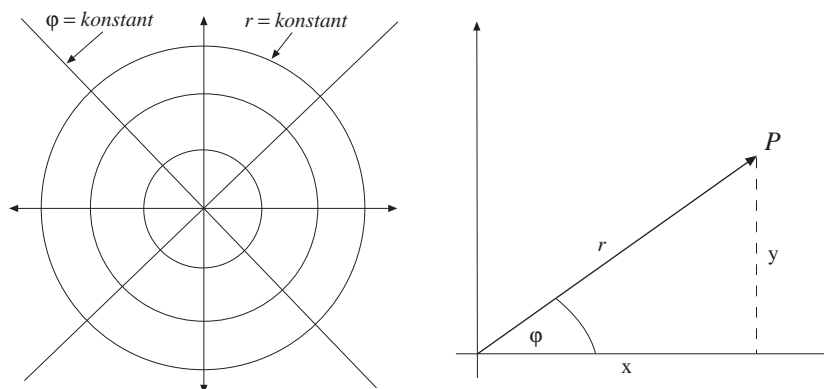
$$x^2 = 2py$$

und man erhält eine nach oben geöffnete Parabel, wobei  $p$  bestimmt, ob die Parabel gestaucht ( $p > 1$ ) oder gestreckt ( $0 < p < 1$ ) ist. Gut, dann wäre da noch die beliebte Sache, falls Ursprung und Scheitelpunkt *nicht* identisch sind ... Hm ? Wie lautet also die Parabelgleichung ? ... Hmpf.

$$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)^2$$

## 11.4 Polarkoordinaten

Rekapitulieren wir einmal : Bislang kennen wir die kartesischen Koordinatensysteme  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , wo die Lage eines Punkt in der Form  $(x, y)$  bzw.  $(x, y, z)$  beschrieben wird. Dann gibt 's da noch die Gaußsche Zahlenebene für mehrdimensionale Zahlen. Und nun folgt eine Variation zum kartesischen Koordinatensystem, die Polarkoordinaten !





Gut, nun kann man ein noch ein wenig generalisieren. Darum wird der Bruch mit  $\frac{1}{a}$  erweitert, um somit eine neue Größe, die **numerische Exzentrizität**<sup>43</sup>, einzuführen.

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a} \cos \varphi}$$

Der Bruch  $\frac{e}{a}$  wird nun zur numerischen Exzentrizität  $\varepsilon$  erklärt.

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

Warum  $\varepsilon$  eingeführt wurde? Damit es schöner aussieht? Nein, denn die Größe  $\varepsilon$  bestimmt bei den Polarkoordinaten über die Struktur des Kegelschnitts.

$\varepsilon = 0$	Kreis
$\varepsilon < 1$	Ellipse
$\varepsilon > 1$	Hyperbel
$\varepsilon = 1$	Parabel

Warum für  $\varepsilon = 1$  eine Parabel entsteht, soll nun exemplarisch untersucht werden. Dazu wird der Parameter  $\frac{b^2}{a}$  durch  $p$  ersetzt. Dann gilt für die eben erhaltene Gleichung.

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \quad \Leftrightarrow \quad r - r \cos \varphi = p$$

Das ganze wird dann in kartesische Koordinaten umgewandelt.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - x &= p & \Leftrightarrow & \quad \sqrt{x^2 + y^2} = p + x \\ x^2 + y^2 &= p^2 + 2px + x^2 & \Leftrightarrow & \quad y^2 = p^2 + 2px \end{aligned}$$

Das kommt einer Parabel schon bedrohlich nahe, nun wird die  $x$ -Koordinate verschoben.

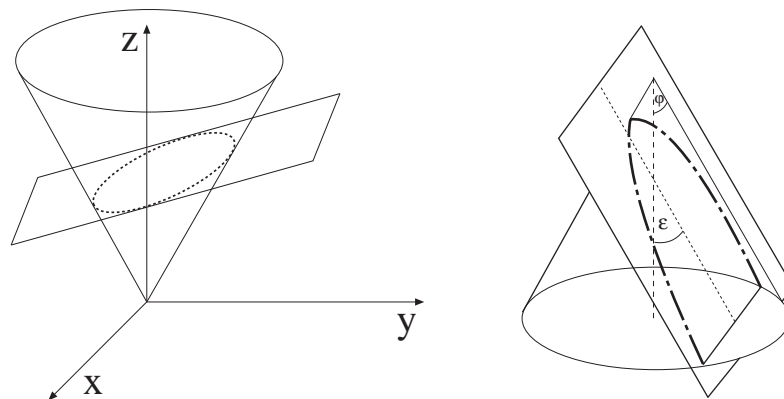
$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x - \frac{p}{2} \\ y^2 &= p^2 + 2p \underbrace{\left(x - \frac{p}{2}\right)}_{p^2 + 2px - p^2} \\ y^2 &= 2px \quad y = \pm \sqrt{2px} \end{aligned}$$

---

<sup>43</sup>vgl. hierzu die *lineare* Exzentrizität  $e$  ( Brennweite ).

### ☆ KEGELSCHNITTE - REPRISE

Wie ja eingangs schon erwähnt wurde, entstehen Kegelschnitte beim Schnitt einer Ebene mit einem Doppelkegel. Dies soll nun noch ein wenig mehr veranschaulicht werden. Nehmen wir also an, ein beliebiger Doppelkegel wird von einer Ebene geschnitten. Verläuft genau diese Ebene parallel zur Grundfläche des Kegels, so entsteht am Schnitt ein *Kreis*. Wird nun der Neigungswinkel der Ebene ein wenig vergrößert, so entsteht eine *Ellipse*. Vergrößert man aber den Winkel soweit, dass er der Neigung des Kegelmantels entspricht, so entsteht eine *Parabel*. Bei einem noch mehr vergrößerten Winkel entsteht schließlich eine *Hyperbel*, da die Ebene nun beide Kegelhälften schneidet.



Gut, folgendes Szenario wurde initialisiert : Die Spitze des Kegels befindet sich im Koordinatenursprung und die Symmetrieachse fällt mit der  $z$ -Achse zusammen. Dann kann der Kegel durch eine Gleichung beschrieben werden.

$$(\omega)z^2 = x^2 + y^2 \quad (\omega > 0)$$

Das kleine Omega steht hier der Vollständigkeit halber für einen Skalierungsfaktor - spielt aber bei der nun folgenden Betrachtung nur eine periphere Rolle und wird deshalb weggelassen. Ach ja, die Grundfläche des Kegels ist natürlich ein Kreis mit der Kreisgleichung :  $r^2 = x^2 + y^2$  Nun definieren wir eine beliebige Ebene, die den Kegel schneiden soll. Das geschieht durch eine Gerade mit der Gleichung :

$$z = \frac{1}{2}y + 1$$

Folglich ist der **Kegelschnitt** die Menge aller Punkte, die die Kegel- und die Ebenengleichung erfüllen. Nicht vergessen : Da es sich um eine Gerade handelt, die *nicht* parallel zur Abszisse verläuft, muss als Endergebnis eine Gleichung für eine Ellipse herauskommen - ein anderes Ergebnis wäre nicht wünschenswert. Darum wird nun weiter umgeformt und gleichgesetzt.

$$x^2 + y^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}y + 1\right)^2}_{\frac{1}{4}y^2 + y + 1}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}y^2 - y = 1$$

Nur erfolgt noch ein wenig quadratische Ergänzung, und dann ...

$$x^2 + \left( \sqrt{\frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} = 1$$

$$x^2 + \underbrace{\left( \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}_{\text{nennen wir } \bar{y}} = \frac{4}{3}$$

Voilà, hier haben auch schon die allgemeine *Ellipsengleichung*.

$$\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Nun wird die Schnittebene modifiziert und derselbe Prozess läuft ein zweites mal ab.

$$z = y + 1$$

Das ist eine um 1 nach oben verschobene Gerade, die im Winkel von  $45^\circ$  zur Bezugsachse  $y$  steht - und somit parallel zum Kegelmantel verläuft. Es müsste also eine *Parabel* entstehen.

$$x^2 + y^2 = \underbrace{(y+1)^2}_{y^2+2y+1}$$

$$x^2 = 2y + 1$$

Wir definieren  $\bar{y} := y + \frac{1}{2}$  und erhalten eine waschechte Parabel.

$$x^2 = 2\bar{y}$$

Im nächsten Schritt suchen wir eine Hyperbel und nehmen eine Konstante als Gerade,

$$y = 1$$

das ist eine senkrechte Ebene parallel zur  $z$ -Achse. Eingesetzt in die Kegelgleichung ergibt es dann eine *Hyperbelgleichung*.

$$x^2 + 1 = z^2$$

$$\frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{1} = 1$$

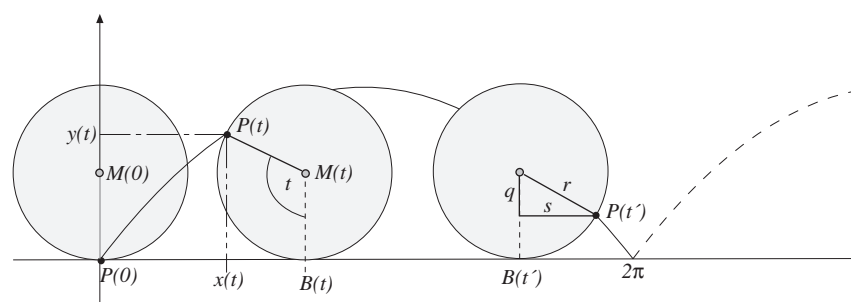
Verläuft die Ebene nicht senkrecht, sondern parallel zur  $y$ -Achse, so muss es ja einen *Kreis* ergeben. Das lässt sich auch durch Gleichsetzen schnell zeigen.

$$z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

## 11.5 Zykloide

... Wer kennt Zykloide<sup>44</sup>? Oder besser gefragt, wer sie nicht kennt, denn bis zur Vorlesung hatte ich zumindest diesen Begriff noch nie gehört. Also, am besten stellt man sich einen Reifen vor, meinetwegen auch einen Fahrradreifen, an dem ein alter Kaugummi klebt. Bewegt sich nun der Reifen, dann bewegt sich auch der Kaugummi mit. Die Frage ist also, welche Bewegung er denn beschreibt, da zusätzlich zur Kreisbewegung des Rades noch die horizontale Bewegung erfolgt ... Hm, verlassen wir nun die unwissenschaftliche Anschaulichkeit und drücken alles in mathematischen Termini aus, dann definieren wir die **Zykloide** als einen Bogen, der von einem Punkt auf einer Einheitskreisscheibe beim Rollen entlang der  $x$ -Achse im kartesischen Koordinatensystem beschrieben wird. Dazu folgt nun eine Abbildung und eine Hand voll Definition.



Dies ist der Weg einer *normalen* Zykloide<sup>45</sup>. Und nun werden die Variablen definiert.

$M(t)$	Mittelpunkt
$t$	Walzwinkel
$c$	$PM$
$B(t)$	Berührungspunkt mit der $x$ -Achse
$s$	$r \cdot \sin t$
$q$	$r \cdot \cos t$

Eine *normale* Zykloide hätte demnach den Abstand  $c = r$ . In der Parameterform lauten die Gleichungen für diese Zykloide :

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

Für *allgemeine* Zykloide gelten die modifizierten Parameter, da  $c$  hier nicht unbedingt gleich dem Radius des Kreises sein muss<sup>46</sup>.

$$\begin{cases} x(t) = rt - c \cdot \sin t \\ y(t) = r - c \cdot \cos t \end{cases}$$

<sup>44</sup>Der Begriff stammt aus dem Griechischen und lässt sich in etwa mit „Rollkurve“ übersetzen.

<sup>45</sup>Bei einer *verkürzten* Zykloide sitzt  $P$  tiefer und bei einer *verlängerten* Zykloide dementsprechend höher.

<sup>46</sup>Anschaulich betrachtet klebt der Kaugummi dann auf der Felge oder schwebt über dem Reifen.

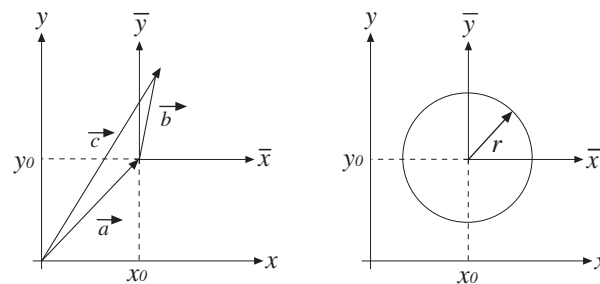
### 11.6 Koordinatentransformation in der Ebene

Beizeiten lassen sich Gleichungen deutlich vereinfachen, wenn man ihnen ein anderes Koordinatensystem zuweist. Das kann zum Beispiel bei einem Kreis der Fall sein, dem im neuen Ko-System der Mittelpunkt auf den Ursprung des Ko-Systems zugewiesen wird. Nachfolgend wird das originale kartesische Ko-System mit  $(x, y)$  und das neue System mit  $(\bar{x}, \bar{y})$  bezeichnet.

#### ☆ TRANSLATION

Hier wird der Ursprung des alten Systems um einen Vektor, dem *Translationsvektor*  $\vec{a}$  verschoben. Somit hat ein Punkt  $P(x, y)$  alte und gleichzeitig neue Koordinaten, da er selber *nicht* verschoben wird. Das soll in der Abbildung dargestellt werden - für die Vektoren gilt :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Für die Berechnung der Vektoren  $\vec{c}$  und  $\vec{b}$  gelten nach den Regeln der Vektorrechnung.

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{b} + \vec{a} & \vec{b} &= \vec{c} - \vec{a} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### ★ Beispiel.

Wie anfangs angedeutet wurde, kann die Translation bei einem Kreis sehr lohnenswert sein, besonders dann nämlich, wenn Kreismittelpunkt und Ursprung nicht identisch sind. Das soll nun gezeigt werden. Für den Kreis gilt die allseits bekannte Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Da der Kreis aber verschoben ist, muss die Gleichung für das alte Ko-System modifiziert werden, um so auch allgemein platzierte Kreise zu berechnen.

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$



Hm, sieht nicht so toll aus, oder ? Darum legen wir nun den Kreismittelpunkt auf den Ursprung des neuen  $(\bar{x}, \bar{y})$ -Systems. Zwischen den Koordinaten des alten und neuen Systems besteht die Beziehung,

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_0 & y &= \bar{y} + y_0 \\ \bar{x} &= x - x_0 & \bar{y} &= y - y_0 \end{aligned}$$

somit hat der gleiche Kreis im neuen System eine deutlich angenehmere Gleichung.

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$$

### ☆ TRANSLATION IM KOMPLEXEN

Natürlich funktioniert die Translation auch in der komplexen Ebene. Hier hat ein Punkt bzw. eine komplexe Zahl die Darstellung  $z = x + \imath y$  und nach erfolgreicher Translation

$$\bar{z} = \bar{x} + \imath \bar{y}$$

mit  $z_0 = x_0 + \imath y_0$  und den Koordinatenbeziehungen  $x = \bar{x} + x_0$  und  $y = \bar{y} + y_0$

### ☆ DREHUNG AM URSPRUNG

Nun soll das Koordinatensystem  $(x, y)$  *gedreht* werden, um somit ein neues  $(\bar{x}, \bar{y})$  zu schaffen. Das geschieht im Kartesischen wie im Komplexen durch die Drehung am Ursprung um den Winkel  $t$ . Sei also eine komplexe Zahl  $z$  im alten Ko-System mit  $z = x + \imath y$  beschrieben, so gilt für das neue System  $\bar{z} = \bar{x} + \imath \bar{y} \dots$  oder in der Exponentialform

$$\bar{z} = |\bar{z}| \cdot e^{\imath \bar{\varphi}}$$

Wobei sich der neue Winkel  $\bar{\varphi}$  aus dem alten plus dem Drehwinkel  $t$  zusammensetzt.

$$\bar{\varphi} = \varphi + t$$

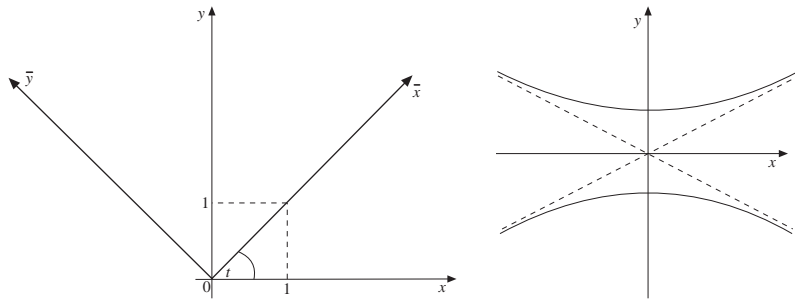
Zwischen  $z$  und  $\bar{z}$  bestehen mehr oder minder leicht nachprüfbare Beziehungen.

$$\begin{aligned} z &= \bar{z} \cdot e^{\imath t} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = z \cdot e^{-\imath t} \\ x + \imath y &= \underbrace{(\bar{x} + \imath \bar{y})(\cos t + \imath \sin t)}_{(\bar{x} \cos t - \bar{y} \sin t) + \imath (\bar{x} \sin t + \bar{y} \cos t)} \end{aligned}$$

Daraus folgen nun die kartesischen Beziehungen zwischen  $x \leftrightarrow \bar{x}$  und  $y \leftrightarrow \bar{y}$

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \cos t - \bar{y} \sin t \\ y &= \bar{y} \cos t + \bar{x} \sin t \\ \bar{x} &= x \cos t + y \sin t \\ \bar{y} &= -y \sin t + x \cos t \end{aligned}$$

## ★ Beispiele.



Bei der **linken Abbildung** wurde das Ko-System um den Winkel  $t = 45^\circ (\frac{\pi}{4})$  verschoben. Ein Punkt  $P$  hätte im alten System die Koordinaten :

$$x = 1 \quad y = 1$$

Die neuen erhalten wir durch die eben entwickelte Transformationsbeziehung.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \\ \bar{y} &= -1 \sin \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0\end{aligned}$$

Die **rechte Abbildung** repräsentiert ein hyperpelähnliches Etwas. Und wenn man genau hinsieht, dann ist es auch eine Hyperbel - nur nicht in der **Hauptachsenform**<sup>47</sup>. Es muss also ein transformiertes Koordinatensystem  $(\bar{x}, \bar{y})$  geben, so dass die Hyperbel in der allgemeinen Gleichung vorliegt.

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

Vermutlich wird eine Translation hier - außer unnötiger Arbeit - nichts bringen. Eine Drehung muss her, und zwar um  $90^\circ (\frac{\pi}{2})$  !

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \bar{y} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\bar{y} \\ \bar{y}^2 &= x^2 \\ y &= \bar{y} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \bar{x} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \bar{x} \\ \bar{x}^2 &= y^2\end{aligned}$$

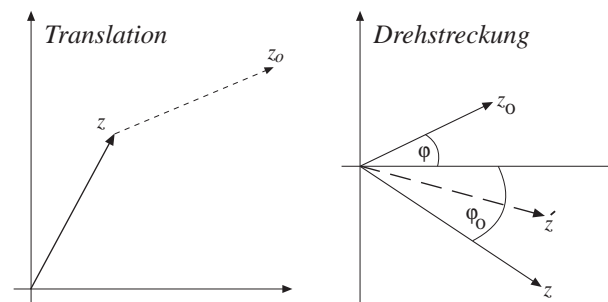
Daraus folgt für unsere Hyperbel im transformierten System.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

<sup>47</sup>Durch die *Hauptachsentransformation* können Ellipse & Co. in die Standardform gebracht werden.

## 11.7 Abbildungen in der Ebene

Im Vergleich zu den Koordinatentransformationen, wo das System an sich transformiert wurde und die Bildpunkte unverändert blieben, können bei Abbildungen in der Ebene die Bildpunkte nach vorgegebenen Mustern transformiert werden. Wer schon einmal etwas mit 3D-Modellierung zu tun hatte und Programme wie *Cinema 4D* oder *SketchUp* kennt, wird wohl um die Transformation von Objekten nicht herumgekommen sein. In diesem Abschnitt werden die mathematischen Hintergründe erläutert - anders ausgedrückt : Was passiert mathematisch, wenn ich beispielsweise ein Objekt rotieren lasse, vergrößere oder an einer Achse spiegle. Da sich mit solchen Sachen in der komplexen Ebene gut umgehen lässt, geschieht die Berechnung auch meist komplex.



### ☆ TRANSLATION

Bei der Translation werden alle Punkte um einen vordefinierten Vektor verschoben - hier eine beliebige komplexe Zahl  $z_0$ , so dass gilt :

$$z \longrightarrow z + z_0$$

### ☆ DREHSTRECKUNG

Um ein Objekt rotieren zu lassen empfiehlt es sich, eine komplexe Multiplikation der Bildpunkte durchzuführen. Für den Fall einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl vom Betrage  $|z| = 1$  würde lediglich eine Drehung erfolgen - bei anderen Zahlen  $|z| \neq 1$  eine zusätzliche Streckung bzw. Stauchung des Objektes.

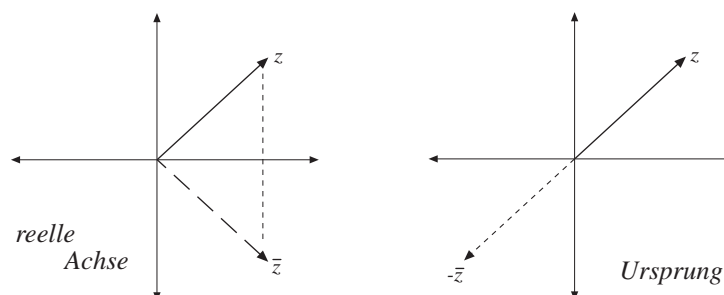
$$z \longrightarrow z \cdot z_0$$

### ☆ SPIEGELUNG AN DER REELLEN ACHSE UND AM URSPRUNG

Dies hier geht im Komplexen besonders einfach, da man sich die Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl zunutze macht.

$$z \longrightarrow z \cdot \bar{z}$$

$$z \longrightarrow z \cdot -\bar{z}$$

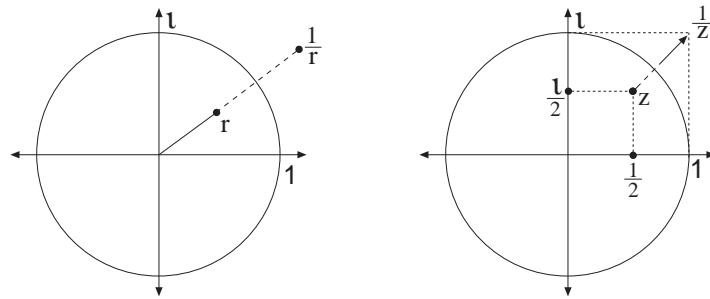


## ☆ INVERSION

Jetzt wird es ein wenig komplizierter. Man stelle sich den komplexen Einheitskreis vor und überlege sich, dass alle Punkte innerhalb des Kreises nach außerhalb des Kreises invertiert werden und vice versa. Dies geschieht durch die Vorschrift :

$$z \longrightarrow \frac{1}{\bar{z}}$$

Der Einheitskreis stellt also die magische Grenze dar, die von einem komplexen Ursprungsvektor unendlicher Länge mit beliebigen Winkel durchschritten wird. Interessant ist hier, dass Punkte, die verdammt nah am Ursprung liegen auch verdammt weit invertiert werden ( zugegeben, dass ist verdammt unpräzise ausgedrückt ! ) Die folgenden Abbildungen sollen dies verdeutlichen, wobei man auch einen besonderen Blick auf die inverse Berechnung des ( ... verdammt ! ) nahe am Ursprung gelegenen Punktes  $z = \frac{1}{32} + i\frac{1}{64}$  legen sollte.



Bei der rechten Darstellung existiert eine komplexe Zahl  $z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ , die in der Ebene invertiert werden soll. Berechnen wir zuerst den inversen Radius von  $z$ , so gilt :

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Invertiert ergibt sich schnell ein neuer Radius ...

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Und dieser neue Radius ist der Betrag des invertierten komplexen Punktes in der Ebene. Nun gut, die Inversion der konjugiert komplexen Zahl sollte recht schnell gehen.

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}} = \frac{1(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} + i\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 1 + i$$

Wie man unschwer erkennen kann, hat der invertierte Punkt einen ähnlichen Abstand zum Einheitskreis wie der originale Punkt. Wie aber schon erwähnt wurde, ändert sich das schlagartig je näher sich der zu invertierende Punkt dem Ursprung nähert. Dazu nun das kleine Beispiel mit dem Punkt  $z = \frac{1}{32} + i\frac{1}{64}$ . Allein der invertierte Radius spricht Bände - die inverse Konjugierte sollt ihr lieber selber ausrechnen und euch vor Freude ein Loch ins Knie bohren.

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \left(\frac{1}{64}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{32^2} + \frac{1}{4 \cdot 32^2}} = \sqrt{\frac{5}{4 \cdot 32^2}} = \frac{\sqrt{5}}{64}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{64}{\sqrt{5}} \approx 28$$

## 12 Erste Schritte zur Linearen Algebra

### 12.1 Vektorräume

Das zentrale Thema der Linearen Algebra sind die Vektorräume. Wenn man diesen Begriff das erste Mal hört, denkt man eventuell spontan an Vektoren im Raum  $\mathbb{R}^3$ . Das ist zwar nicht abwegig, doch ein Vektorraum ist noch viel mehr. Ein Vektorraum ist eine Menge, der immer ein Körper  $K$  zugrunde liegt<sup>48</sup>, und dessen Elemente gewissen Gesetzen gehorchen. Welcher Körper das nun sein mag, ist erst einmal zweitrangig. Das kann z.B.  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}$  oder ein binärer Körper aus zwei Elementen sein. Darum wird der Körper über dem Vektorraum – also die Menge von Elementen, die dem Vektorraum zugrunde liegt – auch allgemein mit  $K$  bezeichnet.

#### ► DEFINITION EINES $K$ -VEKTORRAUMS

Sei  $K$  ein beliebiger Körper, dann bildet die Menge  $V$  über  $K$  einen Vektorraum, wenn die Elemente<sup>49</sup> von  $V$  folgende Bedingungen erfüllen.

$$\begin{aligned} (+) \quad V \times V &\longrightarrow V \\ (a, b) &\longmapsto (a + b) \end{aligned}$$

1.  $\forall v \in V : a + b = b + a$
2.  $\forall v \in V : a + (b + c) = (a + b) + c$
3.  $\exists! v \in V : a + \circ = a$
4.  $\exists! v \in V : v + (-v) = \circ$

$$\begin{aligned} (\cdot) \quad K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \quad \lambda \in K \end{aligned}$$

1.  $\forall v \in V : \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
2.  $\forall v \in V : (\lambda \mu)a = \lambda(\mu a)$
3.  $\forall v \in V : (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
4.  $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$

... Ein simples Beispiel für eine Menge, die laut Axiome einen Vektorraum bildet, ist  $K$  selber –  $K$  ist offensichtlich ein Vektorraum über sich selbst.

Es existiert eine Verknüpfung, die **additive Verknüpfung** von Elementen, die zwei  $v \in V$  wieder ein  $v \in V$  zuordnet, und eine Abbildung, die **Multiplikation mit einem Skalar** in  $V$ , die als Ergebnis ebenso ein Element von  $V$  bildet – es sei noch einmal gesagt, dass Elemente von  $V$  nicht zwangsläufig Vektoren im klassischen Sinn sein müssen. Darum wird hier der Nullvektor auch nicht durch das klassische  $\vec{0}$  repräsentiert, gleichwohl bei klassischen Vektoren über  $\mathbb{R}^n$  das Symbol  $\vec{0}$  das eindeutig neutrale Element der Addition stellt, sondern durch ein Element, welches allgemein mit  $\circ$  bezeichnet wird.

Dann noch eine Randbemerkung: Da in einem Vektorraum zwei Strukturen herrschen, die des Körpers  $K$  und die der Menge  $V$ , gibt es folglich auch zwei verschiedene Nullelemente: Das Nullelement des Körpers und der Nullvektor  $\circ$ . Dann soll noch einmal explizit erwähnt werden, dass die Verknüpfungen nicht fest und von Gottes Gnaden

<sup>48</sup>Ist  $K$  ein Ring, dann wird  $V$  nicht als Vektorraum, sondern als **K-Modul** bezeichnet.

<sup>49</sup>Die Elemente von  $V$  nennt man stets **Vektoren**, die des Körpers **Skalare**.

sind, sondern stets passend *definiert* werden müssen – so ist die additive Verknüpfung nicht zwangsläufig mit der arithmetischen Addition aus der Schule gleichzusetzen.

✱ **Lemma.** *Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so gilt:*

- i.  $\forall v \in V : 0 \cdot v = \circ$
- ii.  $\forall \lambda \in K : \lambda \cdot \circ = \circ$
- iii.  $\forall v \in V : -v = (-1) \cdot v$

#### ► BEWEISE DER EIGENSCHAFTEN

Die Beweise laufen fast vollständig über die genannten Eigenschaften und sind von ihrer Struktur her den Beweisen der Körperaxiome<sup>50</sup> ziemlich ähnlich. Da sie ebenso simpel wie trickreich sind, sollen sie auch halbwegs ausführlich beschreiben werden. Ach ja, die Pfeile über den kleinen Buchstaben, die in naturwissenschaftlich-technisch orientierter Literatur oft einen Vektor charakterisieren, sollen hier im Laufe des Kapitels zunehmend entsorgt werden. Darum bitte nicht verzweifeln, wenn demnächst der bekannte Pfeil über einem Vektor mal fehlen sollte.

✱ *Beweis.*

$$(i.) \quad \forall v \in V : 0 \cdot v = \circ$$

Man könnte hier zur Null eine zusätzliche Null legitim addieren und daraufhin die Distributivität anwenden. Tun wir das doch einfach.

$$\text{Sei } v \in V, \text{ dann ist } 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0v + 0v$$

Das Ergebnis im Hinterkopf behalten und den Nullvektor  $\circ$  über die Eigenschaft des negativen Elements zum Ausdruck bringen. Wie es bei vielen Beweisen gang und gäbe ist, kann dann recycled und ersetzt werden – die Behauptung wird auf diesem Wege letztendlich bewiesen.

$$\begin{aligned} \circ &= 0v - 0v \\ &= (0v + 0v) - 0v \\ &= 0v + (0v - 0v) \\ &= 0v + \circ \\ 0 \cdot v &= \circ \end{aligned}$$

□

✱ *Beweis.*

$$(ii.) \quad \forall \lambda \in K : \lambda \cdot \circ = \circ$$

Dieser Beweis läuft analog zum ersten Beweis. Gleiches Spiel: Umschreiben, Ergänzen, Eigenschaften anwenden und die Behauptung letztendlich beweisen.

$$\begin{aligned} \circ &= \lambda \circ - \lambda \circ \\ &= \lambda(\circ + \circ) - \lambda \circ \\ &= (\lambda \circ + \lambda \circ) - \lambda \circ \\ &= \lambda \circ + (\lambda \circ - \lambda \circ) \\ &= \lambda \circ + \circ \\ \lambda \cdot \circ &= \circ \end{aligned}$$

□

---

<sup>50</sup>Vgl. hierzu das Grundlagenkapitel.

✗ *Beweis.*

$$(iii.) \quad \forall v \in V : \quad -v = (-1)v$$

Wir addieren  $(-1)v$  zu  $v$  und formen um. Zu zeigen ist, dass  $v + (-1)v$  den Nullvektor ergibt. Dann wäre die Behauptung auch schon bewiesen.

$$v + (-1)v = \underbrace{1v + (-1)v}_{\underbrace{(1-1)v}_{\underbrace{0 \cdot v}_{\circ}}}$$

Die Addition von  $(-1)v$  zu  $v$  hat den Nullvektor ergeben, somit ist  $(-1)v$  das negative Element zu  $v$ , also nichts anders als  $-v$ .

□

### ► BEISPIELE FÜR VEKTORRÄUME

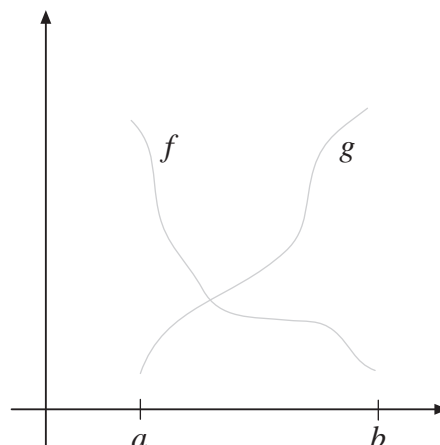
- Die Menge der  $n$ -Tupel als klassischer Vektorraum

Diese Menge  $\mathbb{R}^n$  stellt einen Vektorraum, der aus allen  $n$ -Tupeln besteht. Der Nullvektor  $\circ$  ist hier der klassische Nullvektor  $\vec{0}$ .

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad a + b := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \lambda a := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Der Vektorraum von Funktionen

Wir betrachten die Menge aller Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ , so wird  $\forall f(x), g(x)$  die Summe als neues Element definiert  $\rightarrow (f + g)(x)$ . Ebenso die Multiplikation eines Elementes mit einem Skalar  $\lambda f(x) := (\lambda f)(x)$ . In diesem Fall nennt man die Funktionen auch Vektoren – die Menge der Funktionen im Intervall bildet einen Vektorraum.



Die Abb. zeigt  $f$  und  $g$ , zwei beliebige Funktionen.

- Teilmengen als Vektorraum.

Ein aussagekräftiges Beispiel, welches die Vielheit eines Vektorraum illustrieren soll, ist der Vektorraum von Teilmengen über einer beliebigen Menge  $M$ . Nehmen wir zwei beliebige Teilmengen von  $M$ , der Menge aller Obstsorten, nennen sie  $A$  und  $B$ , dann müssen additive Verknüpfung und skalare Multiplikation so definiert sein, dass die geforderten Axiome erfüllt werden. Die Addition geschieht per folgender Verknüpfung.

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Ein einfaches Beispiel. Sei  $A = \{\text{Bananen}\}$  und  $B = \{\text{Trauben, Bananen, Fallobst}\}$ , so sähe die additive Verknüpfung der Teilmengen  $A$  und  $B$  so aus.

$$A + B := \{\text{Bananen, Trauben, Fallobst}\}$$

Das war noch relativ leicht, doch was ist bloß das negative Element  $-A$ , das zu  $A$  addiert eindeutig den Nullvektor ergibt? Nun, der Nullvektor ist mit Sicherheit die leere Menge  $\emptyset$ , das negative Element hingegen ist kurioserweise  $A$  selber!

$$A + A := (\underbrace{A \cup A}_A) \setminus (\underbrace{A \cap A}_A) = \emptyset$$

Die skalare Multiplikation stellt uns vor eine scheinbar unüberwindbare Hürde. Würde nämlich  $\mathbb{R}$  als zugrunde liegender Körper bestehen, wie sollte dann die Multiplikation eines Skalars mit einer Teilmenge so definiert werden, dass die Axiome vollständig erfüllt werden? Und überhaupt, macht die skalare Multiplikation bei solchen Teilmengen überhaupt Sinn? Um solche Fragen stumpf zu umgehen bietet sich ein besonderer Körper an – der kleinste Körper –, der nur aus den Elementen 0 und 1 besteht.

$$0 \cdot A := \emptyset \qquad 1 \cdot A := A$$

Nun gelten auch die Axiome und mit diesem Trick wurde der Vektorraum aller Obstsorten  $V$  über dem Binärkörper  $K$  konstruiert. Ziemlich kurios, oder?

### 12.1.1 Linearkombinationen

Sind  $v_1, \dots, v_k \in V$ , so heißt  $w \in V$  **Linearkombination** von  $v_1, \dots, v_k$  genau dann, wenn es  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  gibt, die  $w$  eindeutig wie folgt erzeugen:

$$w = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$$

Der Vektor  $w$  ist demnach eine Zusammensetzung aus anderen Vektoren, die mit einem beliebigen Skalar aus  $K$  multipliziert werden. Exempli causa: Der Vektor  $x \in V = 12v_4 - 3v_{16} + \frac{1}{2}v_{27}$  ist eine Linearkombination von  $v \in V$ . Und die Menge  $W$  aller Linearkombinationen bildet einen Vektorraum, d.h.  $W = V$ , oder in alternativer Schreibweise:  $[v_1, \dots, v_k]$

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \\ w_2 &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \end{aligned}$$

$$V \times V \longrightarrow V$$

$$w_1 + w_2 := (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k)v_k$$

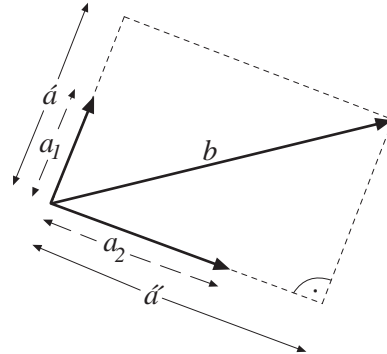
$$K \times V \longrightarrow V$$

$$\lambda \cdot w_1 := (\lambda \lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda \lambda_k)v_k$$



★ **Beispiel.** für die geometrische Deutung von Linearkombinationen.

Seien  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$  und  $a_1, a_2 \neq 0$  sowie  $a_1 \nparallel a_2$



In diesem Fall kann der Vektor  $b$  als Linearkombination der Vektoren  $a_1$  und  $a_2$  beschrieben werden, eben weil durch skalare Multiplikation  $a_1$  und  $a_2$  so modifiziert werden, dass sie durch vektorielle Addition den Vektor  $b$  bilden.

$$b = \left(\frac{a'}{a_1}\right) a_1 + \left(\frac{a''}{a_2}\right) a_2$$

Einfach mal angenommen, die genannten Vorgaben würden nicht gelten, dann würde man unter folgenden Bedingungen eine **Gerade** erhalten.

- $k = 1 \Rightarrow [a_1]$  mit  $a_1 \neq 0$
- $a_2 = 0$
- $a_1 \parallel a_2$

Allerdings sind hier die Skalare nicht eindeutig bestimmt – es existieren unendlich viele Möglichkeiten, um  $b = \lambda a$  darzustellen –,  $b$  und  $a$  sind somit *linear abhängig*.

### 12.1.2 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren  $a_1, \dots, a_k \in V$  heißen **linear abhängig**, wenn Skalare  $\in K$  existieren, die mit den Vektoren  $a_1, \dots, a_k$  multipliziert und daraufhin aufsummiert den Nullvektor bilden. Dabei muss *mindestens* einer der Skalare ungleich Null sein.

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \vec{0}$$

Drehen wir die Aussage um, so haben wir bereits einen Fall für die **lineare Unabhängigkeit** von Vektoren: Nämlich genau dann, wenn der Nullvektor *nur* gebildet werden kann, wenn alle Skalare gleich Null sind<sup>51</sup>. Das offensichtlichste Beispiel dazu wäre  $k = 1$ , also nur ein Vektor  $[a_1]$ . Eine lineare Unabhängigkeit läge nur dann vor, wenn  $a_1 \neq \vec{0}$  gilt, denn somit würde nur  $\lambda_1 = 0$  – demnach alle Skalare gleich Null –, zum Nullvektor führen. Wäre  $a_1 = \vec{0}$ , dann hätten wir für den geforderten Nullvektor alle möglichen Skalare zur Verfügung, eine lineare Abhängigkeit würde zweifelsfrei bestehen. Somit ist der Nullvektor der einzige *einzelne* Vektor, der linear abhängig ist. Alle anderen einzelnen Vektoren sind es nicht.

<sup>51</sup>In diesem Fall spricht man von der **trivialen** Darstellung.

Eine Folge von Vektoren  $a_1, \dots, a_k \in V$  ist stets **linear abhängig**, wenn mindestens einer der Vektoren der Nullvektor ist.

$$\boxed{\exists a_i \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i = \circ \implies a_1, \dots, a_k \in V \text{ sind linear abhängig}}$$

Besteht eine Folge  $a_1, \dots, a_k \in V$  **linear abhängiger** Vektoren, so existiert *mindestens* ein Vektor  $a_i \in V$ , der sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt. Welcher Vektor das nun genau ist, und ob darüber hinaus noch andere existieren, weiß der Geier – bei nur zwei linear abhängigen Vektoren kann man aber mit Sicherheit sagen, dass einer der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist.

### ► EINEDEUTIGKEIT VON SKALAREN

Besteht eine Folge  $a_1, \dots, a_k \in V$  **linear unabhängiger** Vektoren, so sind für alle

$$b = \sum \lambda_i a_i \in [a_1, \dots, a_k]$$

die Skalare  $\lambda_i \in K$  eindeutig bestimmt. Kein Vektor  $b$  hat somit mehr als eine verschiedene Darstellung. Die Skalare nennen sich übrigens die Koordinaten von  $b$  bzgl.  $a_1, \dots, a_k$ . Nehmen wir einfach mal an, sie wären nicht eindeutig, dann würde gelten:

$$b = \sum \lambda_i a_i = \sum \mu_i a_i$$

Nun wird aber über den Nullvektor gezeigt, dass  $\lambda_i = \mu_i \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b - b$$

Klar doch,  $b - b$  ergibt den Nullvektor. Nun existieren aber zwei Möglichkeiten für  $b$ .

$$b - b = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i - \sum_{i=1}^n \mu_i a_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) a_i$$

Da die Vektoren aber linear unabhängig sind, muss für alle Skalare  $(\lambda_i - \mu_i) = 0$  gelten, also gilt generell  $\lambda_i = \mu_i$ , was die Skalare eindeutig bestimmt.

### 12.1.3 Unterräume, Basen und Erzeugendensysteme

In diesem kurzen Unterkapitel werden weitere elementare Begriffe der Vektorraumtheorie eingeführt. Eine Teilmenge  $U \neq \{\emptyset\}$  eines Vektorraums, in der die geforderten Vektorraumaxiome ebenso wie in  $V$  definiert sind, bildet einen **Unterraum** in  $V$ . Jeder Vektorraum hat sich selber als Unterraum – analog, wie sich jede beliebige Menge selber als Teilmenge hat –, des Weiteren bildet der Nullvektor  $\{\circ\}$  einen trivialen Unterraum eines jeden Vektorraums  $V$ .

...Moment mal, der Nullvektor alleine soll einen Unterraum, und somit einen  $K$ -Vektorraum, bilden? ... Geht denn das überhaupt? ... Das riecht nach Beschiß!

$$\begin{aligned} (+) \quad V \times V &\longrightarrow V \\ (\circ, \circ) &\longmapsto (\circ + \circ) \end{aligned}$$

1.  $\forall v \in V : \circ + \circ = \circ + \circ$
2.  $\forall v \in V : \circ + (\circ + \circ) = (\circ + \circ) + \circ$
3.  $\exists! v \in V : \circ + \circ = \circ$
4.  $\exists! v \in V : \circ + (-\circ) = \circ$

$$\begin{aligned} (\cdot) \quad K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, \circ) &\longmapsto \lambda \circ \quad \lambda \in K \end{aligned}$$

1.  $\forall v \in V : \lambda(\circ + \circ) = \lambda \circ + \lambda \circ$
2.  $\forall v \in V : (\lambda \mu) \circ = \lambda(\mu \circ)$
3.  $\forall v \in V : (\lambda + \mu) \circ = \lambda \circ + \mu \circ$
4.  $\forall v \in V : 1 \cdot \circ = \circ$

Einverstanden, das sieht zwar saudämlich aus, aber offensichtlich hat jeder Vektorraum tatsächlich den trivialen Unterraum  $\{\circ\}$ . Dazu auch gleich eine Übung. Konstruieren wir eine Menge  $M$  aus Tripeln, die die Lösungsmenge einer Gleichung darstellt.

$$M := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^4 + b^3 + c^2 = 0\}$$

Die 50 Euro Frage lautet: „Handelt es sich hierbei um einen Unterraum<sup>52</sup> von  $\mathbb{R}^3$ ?“

## ► ERZEUGENDESYSTEME

Die Vektoren  $a_1, \dots, a_n \in V$  **erzeugen** den Vektorraum  $V$ , falls jeder Vektor  $b \in V$  als Linearkombination der Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  geschrieben werden kann.

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

In anderen Worten: Eine Teilmenge  $E$  von  $V$  nennt man **Erzeugendensystem**, wenn jeder Vektor von  $V$  eine Linearkombination der Vektoren aus  $E$  ist. Erzeugen  $a_1, \dots, a_k$  den Vektorraum  $V$  und sind darüber hinaus auch noch linear unabhängig, dann heißt diese Gesamtheit der Vektoren  $a_1, \dots, a_k$  eine **Basis** in  $V$ . In  $V$  kann es natürlich beliebig viele Basen geben, zu beachten ist allerdings die Gleichmächtigkeit von Basen: Besteht eine Basis aus  $a_1, \dots, a_k$  Vektoren, dann hat jede andere Basis auch  $k$ -Vektoren.

<sup>52</sup>Natürlich, besonders da nur  $(0, 0, 0) = \vec{0}$  als Lösungsmenge in Frage kommt.

★ **Beispiel.**

Es soll die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren in  $\mathbb{R}^2$  untersucht werden..

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Auf dem ersten Blick sieht man solche Zusammenhänge nur bei sehr markanten Vektoren. Was also tun? Nun, man muss Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  finden, so dass die Linearkombination der Vektoren den Nullvektor ergibt. Wie man solche Skalare findet, soll ein wenig später erläutert werden – hier geht es momentan nur ums Prinzip. Also werden drei Skalare aus dem Hut gezaubert, die zufälligerweise genau die Anforderungen erfüllen.

$$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 5 \quad \lambda_3 = -1$$

Die Vektoren sind zweifelsfrei linear abhängig, denn sie erzeugen den Nullvektor.

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

★ **Beispiel.**

Dieses kurze Beispiel soll über ein einfaches lineares Gleichungssystem<sup>53</sup> die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$  illustrieren.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Nullvektor, darum zuerst die allgemeine Form der Gleichung angegeben.

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Lösen linearer Gleichungen wird im nächsten Abschnitt ein geeignetes Lösungsverfahren vorgestellt, das in diesem Fall allerdings noch nicht notwendig ist.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 0 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Man braucht hier weder rechnen noch raten, denn man sieht sofort, dass 0 die einzige Lösung für  $\lambda_2$  ist, somit  $\lambda_2$  in erster Gleichung eingesetzt zu dem Ergebnis führt, dass nur die *triviale* Lösung in Frage kommt - die Vektoren sind eindeutig linear unabhängig.

---

<sup>53</sup>Lineare Gleichungssysteme werden in 14.3 ausführlicher behandelt.

★ **Beispiel.** für die lineare Unabhängigkeit von Polynomen in  $\mathbb{R}^n$

Es werden elementare Funktionen einer Unbekannten  $n$ -ter Potenz betrachtet, um zu zeigen, dass diese eindeutig linear unabhängig sind.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^0 = 1 \\ f_2(x) &= x^1 = x \\ f_3(x) &= x^2 \\ &\vdots \\ f_{n+1}(x) &= x^n \end{aligned}$$

Die Summe der Linearkombinationen soll den Nullvektor ergeben, darum gilt:

$$\sum_{i=0}^k \lambda_{(i+1)} x^i = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \cdots + \lambda_k x^{k-1} + \lambda_{k+1} x^k = 0$$

Da die Gleichung selbstredend für alle  $x$  erfüllt sein soll, müssen alle Skalare  $\lambda_i = 0$  sein, was dann auch die lineare Unabhängigkeit der Polynome bedeutet.

★ **Beispiel.** Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^n$

Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^3$  wurden in der Einführung zu diesem Kapitel bereits erwähnt. In  $\mathbb{R}^n$  zeigen sie, mit  $n$  statt nur drei Dimensionen, natürlich die gleiche Struktur.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  sind *linear unabhängig*, denn für

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

bietet sich nur die triviale Lösung mit allen Skalaren gleich Null an. Generell lässt sich jeder Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  als Linearkombination der linear unabhängigen Einheitsvektoren darstellen – anders ausgedrückt: Die Einheitsvektoren bilden eine Basis in  $\mathbb{R}^n$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

In diesem Fall sind  $a_1, \dots, a_n$  die Skalare, aus denen sich  $\vec{a}$  zusammensetzt.

## 12.2 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem über einem Körper  $K$  mit  $m$  *Gleichungen* bzw. Zeilen und  $n$  *Unbekannten* resp. Spalten,  $(m, n) \in \mathbb{N}$ , hat die allgemeine Form.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Gegeben sind die **Koeffizienten**  $a_{ij} \in K$  mit  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq n$ . Die Symbole  $x_1, \dots, x_n$  heißen die **Unbekannten** und die fest vergebene Zahl  $b$  heißt **konstantes Glied**. Eine lineare Gleichung heißt homogen, falls  $b = 0$ . Die Koeffizienten  $a_{ij}$  werden zu einem rechteckigen Zahlenfeld, genannt **Koeffizientenmatrix**, zusammengefasst, die konstanten Glieder  $b_i$ , genannt **rechte Seite des Gleichungssystems**, ebenso.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

In der Matrizenform hat das lineare Gleichungssystem dann folgende Schreibweise.

$$Ax = b$$

Sind alle  $b_i = 0$ , dann heißt das Gleichungssystem **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

- Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem,  $Ax = b$ , hat entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.
- Ein homogenes lineares Gleichungssystem,  $Ax = 0$ , hat entweder genau eine Lösung, die triviale Lösung  $x = 0$ , oder unendlich viele Lösungen (einschließlich der trivialen Lösung).

## 12.3 Der Gaußsche Algorithmus

Der Name „Gauß“ zieht sich durch die Mathematik wie ein roter Faden. Einigen ist sein Portrait noch vom alten Zehner her bekannt, andere kennen ihn vielleicht aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Gauß<sup>54</sup> stammt auch der *Gaußsche Algorithmus*, der sich zur Lösung linearer Gleichungssysteme überschaubarer Größe eignet. Er beruht auf Äquivalenzumformungen an Gleichungssystemen, d.h. auf Operationen, die die Lösungsmenge nicht verändern. Dazu zählen:

- Vertauschungen von Gleichungen (Zeilen)
- Addition eines  $\lambda$ -fachen einer Gleichung zu einer anderen.
- Multiplikation einer Gleichung mit  $\lambda \neq 0 \in K$

<sup>54</sup> Carl Friedrich Gauß, Mathematiker, Physiker und Astronom (1777-1855).

⇒ EXEMPLARISCHE ANWENDUNG DES GAUSS-ALGORITHMUS.

Sei  $K = \mathbb{R}$ , gesucht ist der Lösungsvektor des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Über die Koeffizientenmatrix und der rechten Seite wird der Lösungsvektor gesucht.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun wende ich den Gaußschen Algorithmus an und verändere die äußere Gestalt des linearen Systems so, dass ich am Ende die Lösungen bequem ablesen kann. Dafür schreibe ich das System der Übersicht halber in Tabellenform auf. Wie man das letztendlich nun macht, das bleibt natürlich jedem selber überlassen – ob man die Matrixschreibweise wählt, eine tabellarisch-geordnete Darstellung oder die Elemente samt Umformungen auf einen Bierdeckel kritzelt –, solange man sich zurecht findet und keinen Unfug<sup>55</sup> produziert ist das okay.

(i)	1	2	-1	1	2	1	
(ii)	1	4	-3	-1	-1	0	+(-1i)
(iii)	2	6	-4	0	1	1	+(-2i)
(iv)	1	0	1	3	5	2	+(-1i)
(v)	-1	4	-1	1	1	0	+(i)
<hr/>							
(i)	1	2	-1	1	2	1	
(ii)	0	2	-2	-2	-3	-1	
(iii)	0	2	-2	-2	-3	-1	+(-ii)
(iv)	0	-2	2	2	3	1	+(ii)
(v)	0	6	-2	2	3	1	+(-3ii)
<hr/>							
(i)	1	2	-1	1	2	1	
(ii)	0	2	-2	-2	-3	-1	
(iii)	0	0	0	0	0	0	↑(v)
(iv)	0	0	0	0	0	0	
(v)	0	0	4	8	12	4	:(4)
<hr/>							
(i)	1	2	-1	1	2	1	
(ii)	0	2	-2	-2	-3	-1	
(iii)	0	0	1	2	3	1	
(iv)	0	0	0	0	0	0	
(v)	0	0	0	0	0	0	

<sup>55</sup>Leider verrechnet man sich bei großen Systemen ziemlich oft, ganz gleich wie übersichtlich die Darstellung ist.

Nun existieren zwei Nullzeilen der Matrix, die einfach ignoriert werden können. Da der Rang einer Matrix durch die Anzahl der Zeilen ungleich den Nullzeilen bestimmt wird, hat diese Matrix den **Rang** 3. Wenn die Anzahl der Unbekannten  $n$  und der Rang einer Matrix bekannt sind, kann dadurch die **Dimension** – die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen – bestimmt werden, indem man den Rang von  $n$  subtrahiert.

Lösungsvektoren bilden einen  $(n - \mathbf{Rang})$ -dimensionalen Vektorraum.

Ein eindeutiges<sup>56</sup> Ergebnis ist wegen  $\mathbf{Rg} < m$  schon jetzt ausgeschlossen.

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{(i)} & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & | & 1 & \text{-(ii)} \\
 \text{(ii)} & 0 & 2 & -2 & -2 & -3 & | & -1 & \\
 \text{(iii)} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 & \\
 \hline
 \text{(i)} & 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & | & 2 & \text{-(iii)} \\
 \text{(ii)} & 0 & 2 & -2 & -2 & -3 & | & -1 & \\
 \text{(iii)} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 & \\
 \hline
 \text{(i)} & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & | & 1 & \\
 \text{(ii)} & 0 & 2 & -2 & -2 & -3 & | & -1 & \text{+(2iii)} \\
 \text{(iii)} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 & \\
 \hline
 \text{(i)} & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & | & 1 & \\
 \text{(ii)} & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & | & 1 & \\
 \text{(iii)} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 & 
 \end{array}$$

Das führt dann auch endlich zur Endform unseres linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\
 & & 2x_2 & + & & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\
 & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1
 \end{array}$$

Was den Lösungsvektor betrifft, so können  $x_4$  und  $x_5$  frei gewählt werden.

$$x = \begin{pmatrix} 1 - x_4 - 2x_5 \\ \frac{1}{2} - x_4 - \frac{3}{2}x_5 \\ 1 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_4 \in \mathbb{R} \\ x_5 \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

Sei einerseits  $x_4 = 1$  und  $x_5 = 0$ , andererseits  $x_4 = 0$  und  $x_5 = 1$ , dann hätten wir aus unendlich vielen Lösungen bereits zwei mögliche Lösungsvektoren bestimmt.

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die zwei Vektoren  $x$  und  $\dot{x}$  sind linear unabhängig, dies sieht man bereits an den letzten zwei Zeilen – für den Nullvektor kommt nur die triviale Lösung in Frage.

<sup>56</sup>Eindeutig im Sinne von nur einer Lösung.



★ **Beispiel.** für die Unlösbarkeit eines linearen Gleichungssystems.

Um zu die Unlösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit drei Unbekannten zu demonstrieren, wird gezeigt, dass der Gauß-Algorithmus mit den elementaren Umformungen zu einem widersprüchlichen Ergebnis führt.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - & & x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 & & = 5 \\ x_1 & 3x_2 + 2x_3 = & 4 \end{array}$$

(i)	1	0	-1	5	
(ii)	1	1	0	5	+(-1i)
(iii)	1	3	2	4	+(-1i)
(i)	1	0	-1	5	
(ii)	0	1	1	0	
(iii)	0	3	3	-1	+(-3ii)
(i)	1	0	-1	5	
(ii)	0	1	1	0	
(iii)	0	0	0	-1	

Alle Koeffizienten der dritten Zeile sind Null und sollen zu einem Ergebnis ungleich Null führen – das ist schlecht. Die letzte Zeile ist unmöglich zu lösen, darum hat dieses Gleichungssystem wahrlich keine Lösung.

## 12.4 Einführung in Matrizen

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $K$  ein Körper. Eine  $K^{m \times n}$ -Matrix ist eine Abbildung,

$$\begin{array}{ccc} A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} & \longrightarrow & K \\ (i, j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array}$$

die ein aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten geordnetes Schema<sup>57</sup> mit  $m \cdot n$  Elementen bildet.

$$A^{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei stellen  $a_{ij}$  die Matrixelemente dar, wobei  $i$  die Zeile und  $j$  die Spalte des betreffenden Elementes angibt. Die einzelnen Zeilen und Spalten werden auch als Vektoren betrachtet, so dass  $A^{m \times n}$  aus  $m$  Zeilenvektoren und  $n$  Spaltenvektoren besteht, wobei  $a_i \in K^n$  und  $a_j \in K^m$ .

<sup>57</sup>Man kann Matrizen auch einfach als geordnetes Zahlenschema bezeichnen.

### 12.4.1 Besondere Matrizen

Ein paar erste spezielle Matrizen werden nun erläutert. Später, wenn der Determinantenbegriff eingeführt wurde, folgen noch weitere Matrizen, u.a. die inverse Matrix.

#### ⇒ DIE TRANSPONIERTE MATRIX $A^T$

Sei  $A^{m \times n}$  eine Matrix, dann bekommt man durch Überführen der Zeilenvektoren in Spaltenvektoren – und umgekehrt – die **transponierte Matrix**  $A^T$ . Ein Zeilenvektor wird somit zu einem Spaltenvektor und ein Spaltenvektor wird zu einem Zeilenvektor. Zu verwirrend? Dann bitte das nachfolgende Beispiel eingehend fixieren.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \quad A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Sei  $A^{n \times n}$  eine quadratische Matrix<sup>58</sup>, dann bekommt man durch symmetrische Spiegelung der Vektoren an der Hauptdiagonalen schnell die transponierte Matrix  $A^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Allerart Regeln für transponierte Matrizen – was passiert beim doppelten Transponieren, beim Transponieren einer additiv verknüpften Matrix und bei der Multiplikation mit einem Skalar.

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda \cdot (A^T)$

#### ⇒ DREIECKSMATRIZEN

Sei  $A^{n \times n}$  eine quadratische Matrix, dann nennt man sie **Dreiecksmatrix**, wenn alle Elemente oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen verschwinden.

$$A^{n \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}} \quad A^{n \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{untere Dreiecksmatrix}}$$

<sup>58</sup>Für den Fall  $A = A^T$  heißt die quadratische Matrix **symmetrisch**.

### ⇒ DIE DIAGONALMATRIX

Sei  $A^{n \times n}$  eine quadratische Matrix, dann nennt man sie **Diagonalmatrix**, wenn für alle  $a_{ij}$  mit  $i \neq j$  die Elemente verschwinden. Eine Diagonalmatrix in Verbindung mit einem Lösungsvektor lässt die Lösung dementsprechend schnell ablesen.

$$A^{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ein Sonderfall der Diagonalmatrix ist die **Einheitsmatrix**, die aus  $n$ -dimensionalen Einheitsvektoren besteht – zur Verdeutlichung wird sie daher oft mit  $E$  bezeichnet.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### 12.4.2 Verknüpfungen auf Matrizen

In diesem Unterkapitel wird erklärt, wie die Addition von Matrizen, die Multiplikation mit einem Skalar und die Multiplikation von Matrizen definiert ist.

#### ⇒ ADDITION VON MATRIZEN ( $A \times A \longrightarrow A$ )

Die Addition ist bei Matrizen, wie bei Vektoren auch, komponentenweise definiert. Zwei Matrizen vom gleichen Typ,  $A^{m \times n}$  und  $B^{m \times n}$  werden somit addiert, indem man die Matricelemente  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  komponentenweise addiert.

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Man schreibt  $A + B = C$ , da durch die additive Verknüpfung eine neue Matrix entsteht.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad C_{A+B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Es werden die geforderten Verknüpfungssaxiome hinsichtlich Vektorräumen erfüllt.

- Kommutativität  $A + B = B + A$
- Assoziativität  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Existenz des neutralen Elements  $A + \circ = A$ . Das ist in diesem Fall die Nullmatrix.
- Existenz des negativen Elements  $A + (-A) = \circ$ . Das ist eine Matrix  $\dot{A}$ , dessen Matricelemente  $\dot{a}_{ij}$  das entgegengesetzte Vorzeichen zu denen von  $a_{ij}$  haben.

⇒ MULTIPLIKATION MIT EINEM SKALAR ( $A \times K \longrightarrow A$ )

Auch die skalare Multiplikation ist wie bei Vektoren komponentenweise definiert, so dass alle Matricelemente  $a_{ij}$  mit einem Skalar  $\lambda$  multipliziert werden.

$$\lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sei z.B.  $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$ , dann könnte man das soeben erworbene Wissen flugs anwenden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad 3 \cdot A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}$$

Folgende Gesetze bei der Multiplikation mit einem Skalar sind uneingeschränkt gültig.

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $1 \cdot A = A$

Damit bildet die Menge aller Matrizen ( $m \times n$ ) über dem Körper  $K$  einen Vektorraum der Dimension  $m \cdot n$ . Betrachten wir dazu exemplarisch die Menge aller  $A^{2 \times 2}$ -Matrizen, die einen 4-dimensionalen Raum bilden, und suchen eine Basis.

$$e_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren  $e_1, e_2, e_3, e_4$  sind linear unabhängig. Warum?

⇒ MULTIPLIKATION VON MATRIZEN ( $A \times A \longrightarrow A$ )

Ist die Spaltenzahl einer Matrix  $A^{m \times n}$  mit der Zeilenzahl einer Matrix  $B^{n \times p}$  **identisch**, so sind die Matricelemente  $c_{ij}$  des Matrizenproduktes  $AB$  wie folgt definiert.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

In anderen Worten: Das  $ij$ -te Matricelement von  $AB$  ist die Summe der einzelnen Produkte der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $B$ .

$$C_{A \cdot B} = \begin{pmatrix} \sum a_{1k} b_{k1} & \sum a_{1k} b_{k2} & \dots & \sum a_{1k} b_{kn} \\ \sum a_{2k} b_{k1} & \sum a_{2k} b_{k2} & \dots & \sum a_{2k} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mk} b_{k1} & \sum a_{mk} b_{k2} & \dots & \sum a_{mk} b_{kn} \end{pmatrix}$$

Damit die Matrizenmultiplikation sitzt, noch ein paar recht illustrierende Beispiele.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C_{A \cdot B} := \begin{pmatrix} 16 & 28 \\ 28 & 73 \end{pmatrix} \quad (\text{Bsp.1.})$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_{A \cdot B} := \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (\text{Bsp.2.})$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C_{A \cdot B} := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Bsp.3.})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_{B \cdot A} := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Bsp.4.})$$

Wie man bei den letzten Beispielen (3) und (4) erkennen kann, ist die Matrizenmultiplikation **nicht kommutativ**<sup>59</sup>, denn  $AB \neq BA$ . Es gelten dennoch folgende Gesetze.

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
- $AE = EA = A$

### 12.4.3 Rang einer Matrix

Unter dem **Rang** einer Matrix,  $\mathbf{Rg}(A)$  versteht man die maximale Anzahl an linear unabhängigen Zeilen- oder Spaltenvektoren. Darum ist es zur Bestimmung von  $\mathbf{Rg}(A)$  sinnvoll, wenn man eine  $A^{m \times n}$ -Matrix auf die sog. *Trapezform* bringt, um so den Rang durch die Anzahl der Zeilenvektoren bestimmt, die nicht nur aus Nullen bestehen.

$$A^{m \times n} = \left( \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & a_{1(r+2)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2(r+1)} & a_{2(r+2)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & a_{r(r+2)} & \cdots & a_{rn} \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

Die Matrix hat  $m$  Zeilen, wobei  $(m-r)$  Zeilen nur aus Nullen bestehen. Der Rang dieser umgeformten Matrix ist somit gleich der Anzahl  $r$  der Zeilen ungleich dem Nullvektor.

$$\mathbf{Rg}(A) = r$$

<sup>59</sup>Gilt allerdings  $AB = BA$ , so nennt man die Matrizen *kommutativ*.

## 12.5 Determinanten

Eine weitere essenzielle Größe der Linearen Algebra soll nun vorgestellt werden. Im Vergleich zu Matrizen, die primär ein geordnetes Zahlenschema bilden, zeigen Determinanten<sup>60</sup> zwar dieselbe Struktur, ihnen wird aber darüberhinaus ein fester Zahlenwert zugewiesen – und genau dieser wird über das Zahlenschema hergeleitet. Determinanten stellen somit quasi den Betrag einer Matrix und lassen sich, dies wird bei der Berechnung später noch deutlicher werden, nur bei quadratischen Matrizen bilden. Die Determinante einer  $K^{n \times n}$ -Matrix ist natürlich auch eine Abbildung.

$$\det : K^{n \times n} \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det A$$

Wozu sind Determinanten da? Nun, eine Determinante kann u.a. die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems bestimmen, da eine eindeutige Lösung nur dann existiert, wenn dessen Determinante ungleich null ist. Zur Illustration soll solch ein Gebilde namens Determinante über ein lineares Gleichungssystem hergeleitet werden. Untersucht wird das Lösungsverhalten eines Systems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 & | \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 & | \cdot (-a_{12}) \end{array}$$

Die Unbekannte  $x_2$  wird eliminiert, denn wir suchen die Bestimmungsgleichung für  $x_1$ .

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}a_{22}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 & = & b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{22}x_2 & = & -b_2a_{12} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \\ \end{array} \right.$$

Dazu müssen natürlich beide Gleichungen miteinander addiert werden.

$$\begin{array}{rclcl} \underbrace{a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1}_{x_1 \text{ ausklammern}} & + & \underbrace{a_{12}a_{22}x_2 - a_{12}a_{22}x_2}_0 & = & b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\text{Determinante}} x_1 & = & b_1a_{22} - b_2a_{12} \end{array}$$

Die gleiche Kiste jetzt noch einmal analog für die Bestimmungsgleichung von  $x_2$ .

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 & | \cdot (-a_{21}) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 & | \cdot a_{11} \end{array}$$

... Wieder fleißig addieren.

$$\begin{array}{rclcl} -a_{11}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{21}x_2 & = & -b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 & = & b_2a_{11} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \\ \end{array} \right.$$

Und auch schon fertig!

$$\underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\text{Determinante}} x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

<sup>60</sup>Der Begriff stammt wahrscheinlich von *determinare* – (lat.) begrenzen, festsetzen.

Jetzt bestimmt der Term  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , dem wir nun den wohlklingenden Namen „Determinante“ verleihen, das Lösungsverhalten des linearen Gleichungssystems.

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Ist die Determinante ungleich null, so hat das System eine eindeutige Lösung. Ausdrücken werden wir eine Determinante *zweiter Ordnung* mit der Bezeichnung:

$$\det A^{2 \times 2} := |A| := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Oder mit zwei senkrechten Begrenzungsstrichen in der allgemeineren Form für  $A^{2 \times 2}$ .

$$\det A^{2 \times 2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Der Wert einer Determinante zweiter Ordnung<sup>61</sup> wird über das Produkt der oberen Diagonale,  $a_{11}a_{22}$ , minus dem Produkt der unteren Diagonale,  $a_{21}a_{12}$ , gebildet. Für Determinanten *dritter Ordnung* funktioniert die Sache nach demselben Schema – Produkte nach diagonalen Vektoren bilden, wobei von oben nach unten addiert und von unten nach oben jeweils subtrahiert wird –, doch für Determinanten *höherer Ordnung* funktioniert es leider nicht. Solche müssen zuerst auf eine Determinante dritter Ordnung reduziert werden, damit anschließend deren Wert errechnet werden kann.

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A^{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Wie ja bereits erwähnt, bildet man über Kreuz die Produkte der Diagonalen – obere Diagonalen jeweils addieren, untere jeweils subtrahieren<sup>62</sup>.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die Abb. zeigt die Berechnungsregel für Determinanten.

$$\det A^{3 \times 3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Die Sache des Ausrechnens gestaltet sich um so schneller, wenn strategisch wichtige Matrixelemente gleich null sind – und somit ein paar lästige Produkte verschwinden.

<sup>61</sup>Bei Determinanten erster Ordnung ist die Determinante gleich dem Matrixelement,  $A = (a) \Rightarrow \det A = a$

<sup>62</sup>Wird auch als Regel von *Sarrus* bezeichnet.

★ **Beispiele.** für die Berechnung von Determinanten.

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 4 + 4 + 0 - 4 - 0 - 0 = 4 \quad (\text{Bsp.1.})$$

$$E^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det E = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \quad (\text{Bsp.2.})$$

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \quad (\text{Bsp.3.})$$

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = 12 + 18 + 30 - 12 - 18 - 30 = 0 \quad (\text{Bsp.4.})$$

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \det A = 45 + 144 + 42 - 45 - 42 - 144 = 0 \quad (\text{Bsp.5.})$$

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \det A = 9 + 12 + 0 - 21 - 0 - 0 = 0 \quad (\text{Bsp.6.})$$

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 = 18 \quad (\text{Bsp.7.})$$

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = 48 + 48 + 48 - 216 - 8 - 64 = -144 \quad (\text{Bsp.8.})$$

Die Beispiele (3–6) illustrieren anschaulich, wie Matrixelemente beschaffen sein müssen, damit der Wert der Determinante zwangsläufig gleich null wird.

Die Determinante einer Matrix verschwindet unter den folgenden Bedingungen.

- Mindestens eine beliebige **Zeile** oder **Spalte** besteht komplett aus Nullen.
- Wenn zwei **Zeilen** oder **Spalten** einer Matrix identisch sind.
- Wenn zwei **Zeilen** oder **Spalten** zueinander proportional sind.
- Eine **Zeile** oder **Spalte** ist eine Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten).

Beim Bsp.4. haben wir zwei identische Zeilen, beim Bsp.5. sind die Spalten 1 und 3 zueinander proportional und beim Bsp.6. ist die dritte Spalte eine Linearkombination der ersten und zweiten, denn  $3 \cdot (1, 0, 3) + 2 \cdot (2, 1, 0) = (7, 2, 9)$ .



### 12.5.1 Eigenschaften von Determinanten.

Jede Determinante  $n$ -ter Ordnung unterliegt gewissen Gesetzmäßigkeiten.

- (1.) Der Wert einer beliebigen Determinante ist stets identisch mit dem Wert der korrespondierenden transponierten Determinante.

$$\det A = \det A^T$$

Das soll am Beispiel einer Determinante zweiter Ordnung erklärt werden.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- (2.) Sei  $A = (a_1, \dots, a_i, a_j, \dots, a_n)$  eine Matrix und  $\dot{A} = (a_1, \dots, a_j, a_i, \dots, a_n)$  geht aus  $A$  durch Vertauschung zweier Spalten hervor, so gilt für die Determinanten:

$$\det(a_1, \dots, a_i, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, a_i, \dots, a_n)$$

Dabei ist  $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$  ein beliebiger **Spaltenvektor** von  $A = (a_1, \dots, a_n)$

Die Eigenschaft der Vorzeichenänderung einer Determinante gilt nicht nur beim Vertauschen von **Spalten**, sondern ebenso beim Tausch zweier beliebiger **Zeilen**.

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  ein beliebiger **Zeilenvektor** von  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Anders ausgedrückt: Werden bei einer Determinante zwei beliebige Zeilen oder Spalten miteinander vertauscht, so ändert die Determinante damit ihr Vorzeichen.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det \dot{A} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}_{\det A}$$

$$\det \dot{A} = -\det A$$

- (3.) Sei  $A$  eine Matrix und  $\dot{A}$  geht aus  $A$  durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem Skalar  $\lambda \in K$  hervor, so gilt für die Determinanten:

$$(I.) \quad \det(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \lambda \cdot \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$(II.) \quad \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Anders ausgedrückt: Bei der Multiplikation einer Determinante mit einem Skalar  $\lambda \in K$  wird nicht, wie es bei Matrizen üblich ist, jedes einzelne Element mit dem Skalar multipliziert, sondern nur *eine* beliebige Zeile oder Spalte.

$$\det \dot{A} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} a_{22} - \lambda a_{21} a_{12} = \lambda \underbrace{(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})}_{\det A}$$

$$\det \dot{A} = \lambda \det A$$

Aus dieser Eigenschaft folgt, dass man einen *gemeinsamen Faktor*  $\lambda \in K$  einer Zeile oder Spalte ohne weiteres vor die Determinante ziehen kann. Sehr praktisch.

$$\det A = \underbrace{\begin{vmatrix} 42 & 20 \\ 21 & 6 \end{vmatrix}}_{-168} = \underbrace{21 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}_{-168} = \underbrace{42 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}_{-168} = \underbrace{84 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{-168}$$

- (4.) Sei  $A$  eine Matrix und  $\ddot{A}$  geht aus  $A$  hervor, indem man zu einer beliebigen Zeile oder Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile oder Spalte addiert, so ändert sich der Wert der Determinante *nicht*.

$$(I.) \quad \det(a_1, \dots, a_i, a_j, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, a_j, \dots, a_n) \quad (\lambda \neq 0)$$

$$(II.) \quad \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

Diese Eigenschaft von Äquivalenzumformungen soll für eine  $A^{2 \times 2}$  gezeigt werden.

$$\det \dot{A} = \begin{vmatrix} (a_{11} + \lambda a_{21}) & (a_{12} + \lambda a_{22}) \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det \dot{A} = (a_{11} + \lambda a_{21})a_{22} - (a_{12} + \lambda a_{22})a_{21}$$

$$\det \dot{A} = a_{11}a_{22} + \lambda a_{21}a_{22} - a_{21}a_{12} - \lambda a_{21}a_{22} = \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}_{\det A}$$

- (5.) Sei  $A =$  eine Matrix und  $\dot{A}$  geht aus  $A$  hervor, indem man eine beliebige Spalte oder Zeile verändert, so gilt für die Determinanten folgender Zusammenhang:

$$(I.) \quad \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, \check{a}_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i + \check{a}_i, \dots, a_n)$$

$$(II.) \quad \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \check{a}_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \check{a}_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Zur Veranschaulichung ein kleines Beispiel mit einem modifizierten Spaltenvektor.

$$\det A = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_2, \quad \det \dot{A} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_4, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\quad}_6$$

- (6.) Sei  $A$  eine beliebige Diagonal- oder Dreiecksmatrix, dann ist  $\det A$  stets das Produkt der Hauptdiagonalen. Das sollte man sich gut merken.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Mit dieser Eigenschaft liegt es nahe, Determinanten der etwas höheren Ordnung durch elementare Umformungen zuerst auf eine Dreiecksmatrix zu bringen, um daraufhin deren Wert durch das Produkt der Hauptdiagonalen schnell auszurechnen. Dies illustriert das folgende Beispiel.

$$\det A = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{48-43=5} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -9 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}_{\prod a_{ii}=5}$$

- (7.) Sei  $E = (e_1, \dots, e_n)$  eine Matrix aus geordneten Einheitsvektoren, dann folgt direkt aus (6.) für den Wert der Determinante solch einer Einheitsmatrix:

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{mit } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

- (8.) Der folgende **Multiplikationssatz** für Determinanten macht das Leben leichter, immer dann, wenn die Determinante eines Matrizenprodukts  $A^{n \times n} \cdot B^{n \times n}$  ausgerechnet werden soll. Diesen Satz sollte man sich gut merken!

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Was bringt der Satz? Ganz einfach, durch die Anwendung entfällt die lästige Matrizenmultiplikation und man gewinnt nicht nur kostbare Minuten an Freizeit, sondern spart sich auch Ärger. Wer das nicht glaubt, hier ein paar Kostproben.

$$\begin{array}{lll} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{\det A=0} & B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}}_{\det B=63} & C_{AB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 15 & 6 \\ 16 & 53 & 32 \\ 15 & 54 & 30 \end{pmatrix}}_{\det C_{AB}=0} \\ \\ A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\det A=6} & B = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}}_{\det B=27} & C_{AB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 7 & 20 & 24 \\ 8 & 34 & 42 \end{pmatrix}}_{\det C_{AB}=162} \\ \\ A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\det A=2} & B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\det B=2} & C_{AB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\det C_{AB}=4} \end{array}$$

- (9.) Ist die Determinante einer  $A^{n \times n}$ -Matrix gleich null, dann bricht der Gaußsche Algorithmus mit  $\mathbf{Rg}(A) < n$  vorzeitig ab. Das soll das folgende Beispiel einer Matrix demonstrieren, dessen dritte Spalte  $a_{i3}$  eine Linearkombination der anderen Spalten ist – somit die Determinante zwangsläufig gleich null ist.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Beim Umformen in eine Diagonalmatrix geschieht, was zuvor prophezeit wurde.

$$\begin{array}{ccc|c} \text{(i)} & 1 & 2 & 7 \\ \text{(ii)} & 0 & 1 & 2 \\ \text{(iii)} & 3 & 0 & 9 & +(-3i) \\ \hline \text{(i)} & 1 & 2 & 7 \\ \text{(ii)} & 0 & 1 & 2 \\ \text{(iii)} & 0 & -6 & -12 & +(6ii) \\ \hline \text{(i)} & 1 & 2 & 7 \\ \text{(ii)} & 0 & 1 & 2 \\ \text{(iii)} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Nach so vielen Eigenschaften widmet sich das nächste Unterkapitel der drängenden Frage, wie man eigentlich Determinanten höherer Ordnung herleiten kann. Die bis dato angewandte Regel von *Sarrus*<sup>63</sup> ist dafür nicht geeignet.

<sup>63</sup> Pierre-Frédéric Sarrus, franz. Mathematiker, 1798-1858

### 12.5.2 Unterdeterminanten und algebraisches Komplement

Jede Determinante lässt sich in einer anderen Form durch sog. **Unterdeterminanten** ausdrücken – das sind in der Ordnung reduzierte Determinanten, die man durch Streichen *einer* beliebigen Zeile *und* Spalte erhält. Für eine Determinante dritter Ordnung würde genanntes Wegstreichen folglich zu einer Determinante zweiter Ordnung führen.

Werden bei einer Determinante  $n$ -ter Ordnung die  $i$ -te Zeile und  $j$ -te Spalte nihilisiert, so wird die neu entstandene Determinante  $(n - 1)$ -ter Ordnung  $D_{ij}$  als **Unterdeterminante** bezeichnet. Aus einer Determinante  $n$ -ter Ordnung lassen sich maximal  $n^2$  Unterdeterminanten bilden.

Am Beispiel einer Determinante dritter Ordnung soll dies nun demonstriert werden.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Eine Unterdeterminante mit einem bestimmten Vorzeichen, welches nach der Vorschrift  $(-1)^{i+j}$  gebildet wird, bezeichnet man als das sog. **algebraische Komplement**  $A_{ij}$ .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Das algebraische Komplement ist somit nichts anderes als eine vorzeichenmodifizierte Unterdeterminante  $D_{ij}$  – und natürlich eine  $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrix. Mit diesem Wissen drücken wir nun eine Determinante dritter Ordnung alternativ aus.

$$\det A^{3 \times 3} = \begin{array}{ccccccc} & & a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ - & a_{13}a_{22}a_{21} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

Das ist die allgemeine Berechnung, doch fällt uns etwas auf? Genau, man kann aus den Produkten jeweils ein Element ausklammern und erhält somit Unterdeterminanten.

$$\det A^{3 \times 3} = a_{11} \underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})}_{D_{11}} - a_{12} \underbrace{(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})}_{D_{12}} + a_{13} \underbrace{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}_{D_{13}}$$

Nun stellen wir unsere Determinante endlich anders dar. Dabei offenbart sich auch langsam der Sinn des schleierhaften algebraischen Komplementes.

$$\det A^{3 \times 3} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}$$

$$\det A^{3 \times 3} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

### 12.5.3 Laplacescher Entwicklungssatz für $n$ -reihige Determinanten

Von Laplace<sup>64</sup> stammt der Entwicklungssatz für Determinanten  $n$ -ter Ordnung. Er besagt, dass sich eine  $n$ -reihige Determinante nach den Elementen einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln lässt.

- Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- Entwicklung nach der  $j$ -ten Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Nach welcher Zeile oder Spalte genau man die Determinante nun entwickelt, ist völlig einerlei. Es liegt aber aus praktischen Gründen nahe, genau jene Zeilen oder Spalten auszuwählen, die die meisten Nullen beinhalten.

#### ★ Beispiel.

Gegeben ist die folgende Determinante vierter Ordnung und gesucht ist deren Wert.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile enthält die meisten Nullen. Da wir uns unnötigen Aufwand sparen wollen, entwickeln wir die Determinante natürlich nach der dritten Zeile.

$$\det A = \sum_{j=1}^4 a_{3j} A_{3j} = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + \underbrace{a_{33}}_0 A_{33} + \underbrace{a_{34}}_0 A_{34}$$

Zwei Produkte fallen weg, jetzt fehlt noch  $D_{31}$  und  $D_{32}$ .

$$D_{31} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}}_{54} \quad D_{32} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}}_{94}$$

Zuletzt noch die algebraischen Komplemente und wir sind fast fertig.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 54 = 54$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 94 = -94$$

$$\det A = 3 \cdot 54 + 7 \cdot (-94) = -496$$

<sup>64</sup> Pierre Simon Laplace, franz. Mathematiker u. Astronom, 1749-1824

## 12.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Das Gebilde „Matrix“ ist von Seiten der Theorie bereits einigermaßen beleuchtet worden – wie ist eine Matrix strukturiert, wie werden Matrizen verknüpft, welche Axiome gelten, etc. perge, perge –, doch zum praktischen Nutzen ist noch nicht allzu viel gefallen. Sicher, man kann lineare Gleichungen durch eine Matrix ausdrücken und entsprechend umformen, es lassen sich lineare Netzwerke der Elektrotechnik durch reelle oder komplexe Matrizen berechnen, zweifelsfrei, es existiert aber darüber hinaus ein Komplex, der besonders für die Medieninformatik von weitaus größerem Interesse ist. Es geht um klassische Computergrafik, sozusagen um die Darstellung und Transformation von Vektoren in der Ebene oder auch im Raum. Man stelle sich einfach das Skelett eines 3D-Objekt vor – sozusagen als „Wireframe“ –, welches um eine beliebige Achse rotiert werden soll.

Beginnen wir der Einfachheit halber mit einem beliebigen Vektor  $\vec{x}$  in der Ebene, meinetwegen einen Ortsvektor in  $\mathbb{R}^2$ , und wollen diesen irgendwie drehen, strecken, stauchen, spiegeln – vielleicht auch alles zusammen –, dann würde zwangsläufig ein neuer Vektor  $\vec{b}$  entstehen, der natürlich durch eine Gleichung ausgedrückt werden kann.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Und diese Matrix  $A$ , die unseren Ur-Vektor transformieren wird, nennen wir anschaulicherweise die *Transformationsmatrix*. Verlassen wir vorübergehend den beschränkten Raum und machen einen Abstecher nach  $\mathbb{R}^n$ , betrachten dort lineare Gleichungen mit einer  $A^{m \times n}$ -Matrix und einem Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$$A^{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Durch die Multiplikation  $A\vec{x}$  würde der folgende resultierende Vektor entstehen.

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Aha! Der resultierende Vektor hat die Dimension  $m$ , der Ur-Vektor allerdings die Dimension  $n$ . Ist das schlimm? Nun, wenn ich einen Vektor  $\in \mathbb{R}^3$  mit einer  $A^{2 \times 3}$ -Matrix transformiere, dann verliert er zwangsläufig an Dimension. Sollte man wissen. Bevor es in Kürze mit der Transformation weitergeht, werden derweil einige Eigenschaften erwähnt, die bei der Multiplikation einer Matrix mit einem *skalierten* Vektor gelten.

- (1.)  $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$
  - (2.)  $A(\lambda\vec{x}) = \lambda \cdot A\vec{x}$
  - (3.)  $A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y}$

★ **Beispiel.**

Um Eigenschaft (3) zu illustrieren, soll nun ein Beispiel folgen, bei dem eine Matrix  $A$  mit zwei verschiedenen Spaltenvektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  verschiedener Skalierung  $\lambda$  und  $\mu$  multipliziert wird. Daraufhin werden die Matrizen addiert, um zu zeigen, dass das Ergebnis gleich  $A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})$  ist.

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wählen wir für dieses Beispiel zwei beliebige Skalare  $\lambda = 3$  und  $\mu = -4$

$$3A\vec{x} - 4A\vec{y} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{x} - 4\vec{y} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A(3\vec{x} - 4\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

## ⇒ EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN – ANDANTE

Nach diesem Exkurs zurück zum eigentlichen Thema: Wir wollen in der Ebene ein paar Vektoren transformieren. Dabei haben wir vorläufig noch kein bestimmtes Ziel vor Augen, sondern wollen einfach nur erfahren, wie eine beliebige  $A^{2 \times 2}$ -Matrix auf beliebige Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$  wirkt.

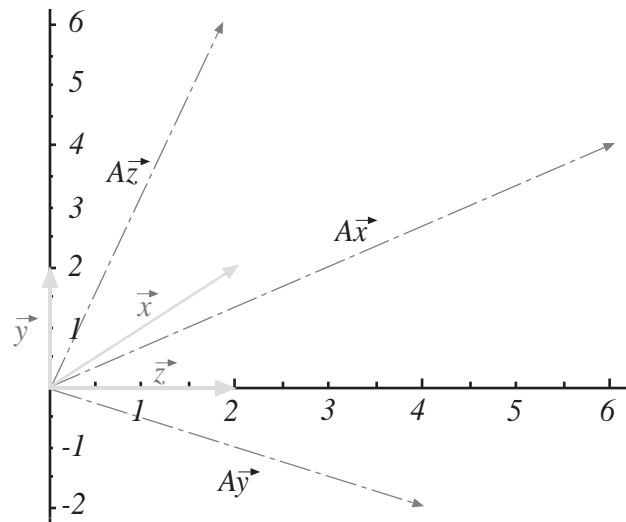
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Durch die Transformationsmatrix werden die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ , wie man unschwer erkennen kann, hinsichtlich ihrer Richtung und ihres Betrages deutlich geändert.



Die Abb. zeigt die Wirkung der Transformationsmatrix auf  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$

Jetzt wird es interessant, denn es sind *genau die* Vektoren der Matrix gesucht, außer dem Nullvektor natürlich, die durch die Transformation auf einen Vektor *gleicher* Richtung abgebildet werden. Es soll demnach *keine* Drehung erfolgen<sup>65</sup>. Das Bild des Vektors ist demnach *kollinear* zum Ur-Vektor. Dafür genügt folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ \lambda\vec{x} &= \lambda E\vec{x} \\ \underbrace{A\vec{x} - \lambda E\vec{x}}_{(A-\lambda E)\vec{x}} &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung erfolgt mit einem linearen Gleichungssystem. Es existiert zwar immer die triviale Lösung, doch die ist natürlich alles andere als gesucht.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses *homogene* lineare Gleichungssystem hat bekanntlich genau dann die nicht-triviale Lösung, wenn  $\det A = 0$  gilt. Bilden wir also die Determinante!

$$\begin{aligned} \det A &= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = 0 \\ \lambda^2 - 1 - 6 &= 0 \\ \lambda^2 &= 7 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

<sup>65</sup>Einzige Ausnahme bildet die Gegenrichtung, die für  $-\lambda$  zugelassen wird.

Die Lösungen dieser Gleichung  $\lambda_{1,2}$  nennt man die **Eigenwerte** einer Matrix. Setzt man die jeweiligen Eigenwerte in das lineare Gleichungssystem ein, so erhält man die zugehörigen **Eigenvektoren** der Matrix. Machen wir das doch mit  $\lambda_1 = \sqrt{7}$  und lösen anschließend mit dem Gaußschen Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1-\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \left| \cdot \frac{3}{1-\sqrt{7}} \right| (-)$$

• Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(-1-\sqrt{7}) - \left( \frac{6}{1-\sqrt{7}} \right)}_{-(1+\sqrt{7})} \quad \left| \cdot (1-\sqrt{7}) \right. \\ & \quad \left. - \underbrace{\left( (1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7}) \right)}_{-(1-7)=6} - 6 = 0 \right. \end{aligned}$$

• Endform:

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Bei dieser Endform ist  $x_1$  oder  $x_2$  frei wählbar, da aufgrund der zweiten Nullzeile zwei Unbekannte übrig bleiben. Die **explizite** Form lautet:

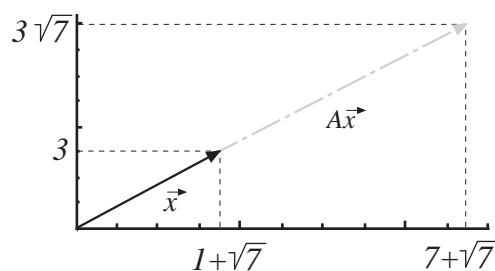
$$(1-\sqrt{7})x_1 + 2x_2 = 0$$

Sinnvollerweise setzen wir  $x_1 = 1 + \sqrt{7}$ , damit  $x_2$  dann einen runden Wert annimmt.

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}_{-6} + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+\sqrt{7} \\ 3\sqrt{7} \end{pmatrix} = \sqrt{7} \begin{pmatrix} \sqrt{7}+1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wenn jetzt der Eigenvektor mit dem transformierten Vektor verglichen wird, dann fällt auf, dass sich zwar dessen Betrag, aber nicht dessen Richtung geändert hat. Das illustriert die folgende Abbildung.



Die Abb. zeigt die Wirkung der Transformationsmatrix auf den Eigenvektor  $x_{\lambda_1}$ .

Der Vollständigkeit halber machen wir das gleich Spiel auch mit  $\lambda_2 = -\sqrt{7}$ .

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \left| \cdot \frac{3}{1+\sqrt{7}} \right| (-)$$

• Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} & (-1+\sqrt{7}) - \left( \frac{6}{1+\sqrt{7}} \right) \quad \left| \cdot (1+\sqrt{7}) \right. \\ & \underbrace{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7}) - 6}_{-1-\sqrt{7}+\sqrt{7}+7=6} = 0 \end{aligned}$$

• Endform:

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Und wieder ist  $x_1$  oder  $x_2$  frei wählbar. Es bietet sich wegen der dritten binomischen Formel  $x_1 = 1 - \sqrt{7}$  an, damit folgt für den Eigen- und transformierten Vektor.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-\sqrt{7} \\ -3\sqrt{7} \end{pmatrix} = \sqrt{7} \begin{pmatrix} \sqrt{7}-1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

#### ⇒ EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN – ALLEGRO

Damit die Berechnung von Eigenwerten in Fleisch und Blut übergeht, schließt sich nun zur Konkretisierung ein zweites Beispiel an. Keine Sorge, auf massive Nebenrechnungen, unnötige Wiederholungen und Blabla meinerseits soll diesmal verzichtet werden – Eigenvektoren auf die komprimierte Tour!

$$\begin{aligned} \text{sei } A &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

... Determinantengleichung.

$$\begin{aligned} \det A &= (5-\lambda)^2 - 9 &= 0 \\ \lambda^2 - 10\lambda + 16 &= 0 \\ \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 8 \end{aligned}$$

... Den ersten Eigenwert  $\lambda_1$  eingesetzt.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0 \\ \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right) & \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{trivial} \end{aligned}$$

◇ Es existieren unendlich viele Eigenvektoren zu  $\lambda_1$  mit:  $x_1 = -x_2$ .

$$x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

... Den zweiten Eigenwert  $\lambda_2$  eingesetzt.

$$\left( \begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ trivial}$$

◇ Es existieren unendlich viele Eigenvektoren zu  $\lambda_2$  mit:  $x_1 = x_2$ .

$$y_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

... Unsere Ergebnisse überprüfen.

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2x$$

$$Ay = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 8y$$

#### EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN – PRESTO

- $A$  sei eine  $n$ -reihige Matrix
- $E$  sei eine  $n$ -reihige Einheitsmatrix
- Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung  $\det(A - \lambda E) = 0$ .
- $\lambda_{1,2}$  - nennt man **Eigenwerte** von  $A$
- $\vec{x}, \vec{y}$  - nennt man **Eigenvektoren** von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$

⊗ **Korollar.** *Eigenwerte und Eigenvektoren von Dreiecksmatrizen.*

Um sich das Leben nicht unnötig schwerer zu machen, sollte eine Besonderheit für Diagonal- resp. Dreiecksmatrizen erwähnt werden, die bei der Berechnung der Eigenwerte von Nutzen ist. Zuerst aber noch die allgemeine Matrizengleichung.

$$(A - \lambda E)\vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ich erinnere daran, dass für Dreiecksmatrizen der Wert der Determinante dem Produkt der Hauptdiagonalen entspricht. Die Gleichung vereinfacht sich dadurch.

$$\det(A - \lambda E) = \det\left(\prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda)\right) = 0$$

Doch diese Gleichung erfüllen genau die Hauptdiagonalelemente  $a_{ii}$ , so dass die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix eben durch jene bestimmt werden. Praktisch, nicht wahr?

$$\lambda_i = a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

⇒ BESONDERE TRANSFORMATIONSMATRIZEN.

Mit dem bereits erworbenen Wissen sollte es inzwischen machbar sein, eine Transformationsmatrix zu kreieren, die einen Vektor vom Betrag her ändert, ihn somit einer Streckung oder Stauchung unterwirft, und ihn zusätzlich in irgendeine Richtung dreht. Jetzt betrachten wir allerdings eine Matrix  $A_\varphi$ , die einen Vektor *nur* um den Winkel  $\varphi$  drehen soll. Nehmen wir als Ur-Vektor  $\vec{x} = (2, 0)$  einen Vektor in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Eine exemplarische Matrix, die  $\vec{x}$  um genau  $45^\circ$  bzw.  $\frac{\pi}{4}$  in mathematisch positiver Richtung drehen lässt, soll den Zusammenhang verdeutlichen.

$$A_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Diese Transformation, die  $\vec{x}$  auf  $\vec{x}_{(45^\circ)}$  abbildet, lässt sich natürlich beliebig oft hintereinander ausführen, so dass nach acht Anwendungen in diesem Fall wieder der Ur-Vektor  $\vec{x}$  erscheint. Für die Transformationsmatrix wählen wir analog zur Exponentenschreibweise die Bezeichnung  $\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{-mal}} = A^n$ . Für das Matrizenprodukt gilt dann:

$$A_{\frac{\pi}{4}}^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A_{\frac{\pi}{4}}^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\frac{\pi}{4}}^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\frac{\pi}{4}}^8 = A^4 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

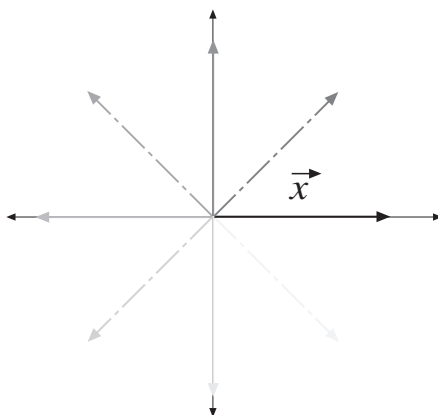
Betrachten wir zum Abschluss direkt die Verknüpfung mit dem Vektor  $\vec{x}$ . Auch wenn die wichtigsten Dinge schon gefallen sind, so sollte dies nicht vergessen werden.

$$A_\varphi \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^2 \vec{x} = A(A_\varphi \vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \vec{x} = A(A^2 \vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^4 \vec{x} = A(A^3 \vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Abb. zeigt die Wirkung von  $A^i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ), auf  $\vec{x}$ .

Abschließend suchen wir noch eine Matrix, die die beiden Einheitsvektoren  $e_1(1, 0)$ ,  $e_2(0, 1) \in \mathbb{R}^2$  um einen beliebigen Winkel  $\varphi$  rotieren lässt.

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

## 12.7 Erweiterte Matrizen

In Abschnitt 14.5.1 wurden schon einige besondere Matrizen behandelt. Da inzwischen auch Determinanten erklärt wurden, soll nun langsam der Begriff der inversen Matrix vermittelt werden. Bevor aber nun Gas gegeben wird, sollte für quadratische Matrizen noch eine wichtige Fallunterscheidung getroffen werden.

Eine Matrix  $A$  heißt **regulär**, wenn  $\det A \neq 0$  gilt, ansonsten heißt sie **singulär**.

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow AX = B \text{ ist eindeutig lösbar}$$

Passend dazu eine elementare Matrizengleichung, bei der eine eindeutige Lösung gesucht ist. Die Matrix ist *regulär*, somit sollte die Lösung auch eindeutig existieren.

$$A \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tja, wie zum Henker soll man das lösen? Wenn man die Gleichung splittet, erhält man eine bekannte Form, die mit dem Gaußschen-Algorithmus schnell gelöst werden kann.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da  $A$  allerdings für beide Gleichungen identisch bleibt, hat sich ein paralleles und somit effizienteres Verfahren bewährt, das sog. **Gauß-Jordan-Verfahren**, welches durch elementare Äquivalenzumformungen sukzessiv zur Lösung führt.

$$\begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad +3 \cdot i.$$

$$\begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & 16 \end{array} \right) \quad -\frac{1}{4} \cdot ii.$$

$$\begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 8 & 10 & 16 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(\frac{1}{8}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 2 \end{array} \right)$$

Daraus folgt unser  $X$  als Lösung der Gleichung, denn es gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_B$$

⇒ DIE INVERSE MATRIX  $A^{-1}$

Die Herleitung zur inversen Matrix funktioniert nach demselben Prinzip, wie beispielsweise die Herleitung eines inversen Elementes der Multiplikation aus dem Körper  $\mathbb{R}$ .

$$ax = 1 \quad (a \neq 0)$$

Die Lösung ist bekanntlich  $a^{-1}$ , das zu  $a$  inverse Element, und so gehen wir auch bei der Suche zur inversen Matrix vor. Das Einselement ist die Einheitsmatrix und gesucht ist genau die Matrix, die uns durch die Matrizenmultiplikation zum Einselement führt.

$$AX = E$$

Die Lösung der Gleichung ist hierbei die inverse Matrix, die fortan mit  $A^{-1}$  bezeichnet wird. Wichtig ist hierbei die besondere Bedeutung der Determinante, denn es gilt:

$$\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

Verschwindet die Determinante einer Matrix, dann erübrigt sich auch die Suche nach der Inversen. Folglich existiert die Inverse nur bei *regulären*  $n$ -reihigen Matrizen. Darauf wird später noch etwas genauer eingegangen, doch zuerst stellt sich uns Laien die drängende Frage, wie man denn genau die Inverse in der Praxis erhält. Hier gibt es mehrere gängige Verfahren – man könnte die Inverse beispielsweise mühselig durch Unterdeterminanten berechnen –, doch das vom alten Gauß stammende *Gauß-Jordan-Verfahren* drängt sich uns förmlich auf. Dazu wird aus der Matrix  $A$  und der zugehörigen Einheitsmatrix eine neue Matrix  $A^{n \times 2n}$  gebildet.

$$A_E = \left( \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Nun wird durch elementare Umformungen die Einheitsmatrix auf die linke Seite gebracht, so dass in Folge der Umformung rechts die Inverse steht. Dazu ein einführendes Beispiel mit einer einfachen 2-reihigen Matrix.

$$A \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun die Einheitsmatrix durch Umformungen sukzessiv auf die linke Seite bringen.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 3 \\ \\ \end{array} \Big] + \\ & \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (\frac{1}{4}) \\ \\ \end{array} \Big] - \\ & \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ | \cdot (\frac{1}{8}) \\ \\ \end{array} \\ & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \end{aligned}$$



Das also soll angeblich die Inverse sein? Nun gut, prüfen wir unser Ergebnis doch einfach nach und sehen, ob durch  $AA^{-1}$  tatsächlich das Einselement erscheint.

$$\begin{array}{ccc} A^{-1} & A & E \\ \left( \begin{array}{cc} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{array} \right) & = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ A & A^{-1} & E \\ \left( \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{cc} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right) & = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Stimmt also. Weiterhin sind  $A$  und  $A^{-1}$  bei diesem Beispiel *kommutativ* - die Kommutativität ist sogar allgemeingültig! -, soll hier aber nicht extra bewiesen werden.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

★ **Beispiel.** zu einer  $A^{4 \times 4}$ -Inversen.

Noch eine Kostprobe mit einer  $A^{4 \times 4}$ -Matrix gefällig? ... Wirklich? Gut, dann würfle ich mir zur Demonstration eine beliebige reguläre Matrix zusammen. Da ich kaum Lust habe, zuerst die aufwendige Determinante einer normalen Matrix zu überprüfen, kreierte ich eine lieber simple Dreiecksmatrix.

$$A_E = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 8 & 10 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Die Determinante ist schnell berechnet, ihr Wert ist  $-400$ , somit ist die Matrix *regulär* und zur Inversion geeignet. Folgt nun das berüchtigte Gauß-Jordan-Verfahren.

<i>i.</i>	8	10	3	4	1	0	0	0	$-2 \cdot (iv.)$
<i>ii.</i>	0	-5	-7	2	0	1	0	0	$-(iv.)$
<i>iii.</i>	0	0	5	1	0	0	1	0	$-\frac{1}{2} \cdot (iv.)$
<i>iv.</i>	0	0	0	2	0	0	0	1	
- - -	-	-	-	-	-	-	-	-	
<i>i.</i>	8	10	3	0	1	0	0	-2	$-\frac{3}{5} \cdot (iii.)$
<i>ii.</i>	0	-5	-7	0	0	1	0	-1	$+\frac{7}{5} \cdot (iii.)$
<i>iii.</i>	0	0	5	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	
<i>iv.</i>	0	0	0	2	0	0	0	1	
- - -	-	-	-	-	-	-	-	-	
<i>i.</i>	8	10	0	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{17}{10}$	$+2 \cdot (ii.)$
<i>ii.</i>	0	-5	0	0	0	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{17}{10}$	
<i>iii.</i>	0	0	5	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	
<i>iv.</i>	0	0	0	2	0	0	0	1	

<i>i.</i>	8	0	0	0	1	2	$\frac{11}{5}$	$-\frac{51}{10}$	$\cdot \left(\frac{1}{8}\right)$
<i>ii.</i>	0	-5	0	0	0	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{17}{10}$	$\cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$
<i>iii.</i>	0	0	5	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\cdot \left(\frac{1}{5}\right)$
<i>iv.</i>	0	0	0	2	0	0	0	1	$\cdot \left(\frac{1}{2}\right)$
---	-	-	-	-	-	-	-	-	
<i>i.</i>	1	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{40}$	$-\frac{51}{80}$	
<i>ii.</i>	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{25}$	$\frac{17}{50}$	
<i>iii.</i>	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	
<i>iv.</i>	0	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	

Das war viel Arbeit und der Lohn ist die eindeutige Inverse. Einfach zur Übung mal nachrechnen. Gut, nun kursiert ja das Gerücht, die Inverse lässt sich nur bei *regulären* Matrizen bilden. Dem ist wirklich so, denn auch wenn hier auf den Beweis verzichtet wird, soll dennoch ein Exempel mit einer *singulären* Matrix statuiert werden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Determinante verschwindet, gleichwohl machen wir uns unbekümmert auf die Suche nach der Inversen. Das Glück sei bekanntlich mit den Mutigen!

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \cdot 2 \quad ] +$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Nein, da ist beileibe nichts zu machen. Offensichtlich lässt sich die Inverse bei *singulären* Matrizen tatsächlich nicht bilden. Als Trost spielen wir ein wenig mit der allgemeinen Matrixgleichung herum und zeigen, dass es zu uns bekannten linearen Gleichungen kaum Unterschiede gibt.

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ EX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Besonders nennenswert sind noch ein paar besondere Eigenschaften der Inversion, die hier auch flugs aufgelistet werden.

$$(1.) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(2.) \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(3.) \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

★ **Beispiele.** zu den Eigenschaften mit zwei simplen  $A^{2 \times 2}$ -Matrizen.

$$\text{sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

I.

$$(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \quad ]+ \\ &\quad \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \cdot (-2) \quad ]+ \\ &\quad \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \right) \\ &\quad \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$(A^{-1}B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit wurde Eigenschaft (1.) soeben illustriert, denn  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

II.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) + ((-1) \cdot ii.) \\ &\quad \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ B^{-1} &= \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) + ((-1) \cdot ii.) \\ &\quad \begin{array}{l} i. \\ ii. \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit wurde auch Eigenschaft (2.) verdeutlicht, denn  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

III.

$$\text{sei } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\det A}$$

Damit wurde dann die letzte Eigenschaft (3.) veranschaulicht.

## 12.8 Euklidische Vektorräume

In einem  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum nennt sich eine Verknüpfung „Skalarprodukt“, wenn  $\forall a, b \in V$  die Verknüpfung  $a \cdot b$  mit folgenden Eigenschaften erfüllt wird.

1.  $a \cdot b = b \cdot a$
2.  $a \cdot a \geq 0$
3.  $a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = 0$
4.  $(a + b)c = ac + bc$
5.  $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$  mit  $a, b \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

Ein Vektorraum  $V$  mit dem definierten *Skalarprodukt* nennt sich **euklidischer Raum**. Diese Unterscheidung wird getroffen, da Skalarprodukte nicht in allen Vektorräumen definiert sind. Der Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  mit definiertem Skalarprodukt wird somit als  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum bezeichnet.

### $\Rightarrow$ EUKLIDISCHE NORM ODER BETRAG EINES VEKTORS

Der Betrag eines Vektors wird über die allgemeine Formel wie folgt definiert:

$$|a| := \sqrt{(a \cdot a)}$$

Für Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$ , was schon aus 14.1. bekannt ist, gilt somit:

$$|a_n| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \cdot a_i)}$$

\* **Lemma.** zur Norm eines Vektors.

- i.  $|a| \geq 0$
- ii.  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- iii.  $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$
- iv.  $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$  „Cauchy-Schwarzsche Ungleichung“
- v.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  „Dreiecksungleichung“

Die Dreiecksungleichung versteht man geometrisch, indem man sich verdeutlicht, dass der addierte Betrag zweier Vektoren  $a$  und  $b$  nicht kleiner sein kann, als  $|a + b|$ .

### $\Rightarrow$ EUKLIDISCHER ABSTAND UND WINKEL ZWISCHEN ZWEI VEKTOREN

Der Abstand  $d$  (distance) zwischen zwei Vektoren  $a, b \in V$  ist wie folgt definiert.

$$d(a, b) := |a - b|$$

Für den Winkel zwischen  $a, b \in V$  gilt hingegen die bekannte Formel aus 14.1..

$$\cos \varphi := \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

★ **Beispiel.** zu *euklidischen Vektorräumen*

Das simpelste Beispiel ist  $\mathbb{R}^n$ , wo das Skalarprodukt für alle Vektoren eindeutig definiert ist. Ist alles hinlänglich aus 14.1. bekannt, soll daher nur kurz angeschnitten werden.

$$a \cdot b := \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

Um noch ein wenig Praxis zu erfahren, erschaffen wir acht Vektoren in der Ebene, die daraufhin exemplarisch nach Betrag, Abstand & Co. untersucht werden sollen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(1.) **Betrag.**

$$|a| := \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{16 + 16} \approx 5,7$$

$$|c| := \sqrt{c \cdot c} = \sqrt{9 + 16} = 5,0$$

$$|e| := \sqrt{e \cdot e} = \sqrt{9 + 16} = 5,0$$

$$|g| := \sqrt{g \cdot g} = \sqrt{9 + 4} \approx 3,6$$

(2.) **Abstand.**

$$d(a, b) := |a - b| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 25} \approx 5,1$$

$$d(c, d) := |c - d| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 4} \approx 2,8$$

$$d(e, f) := |e - f| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 10} \approx 3,1$$

$$d(g, h) := |g - h| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 1} = 1,0$$

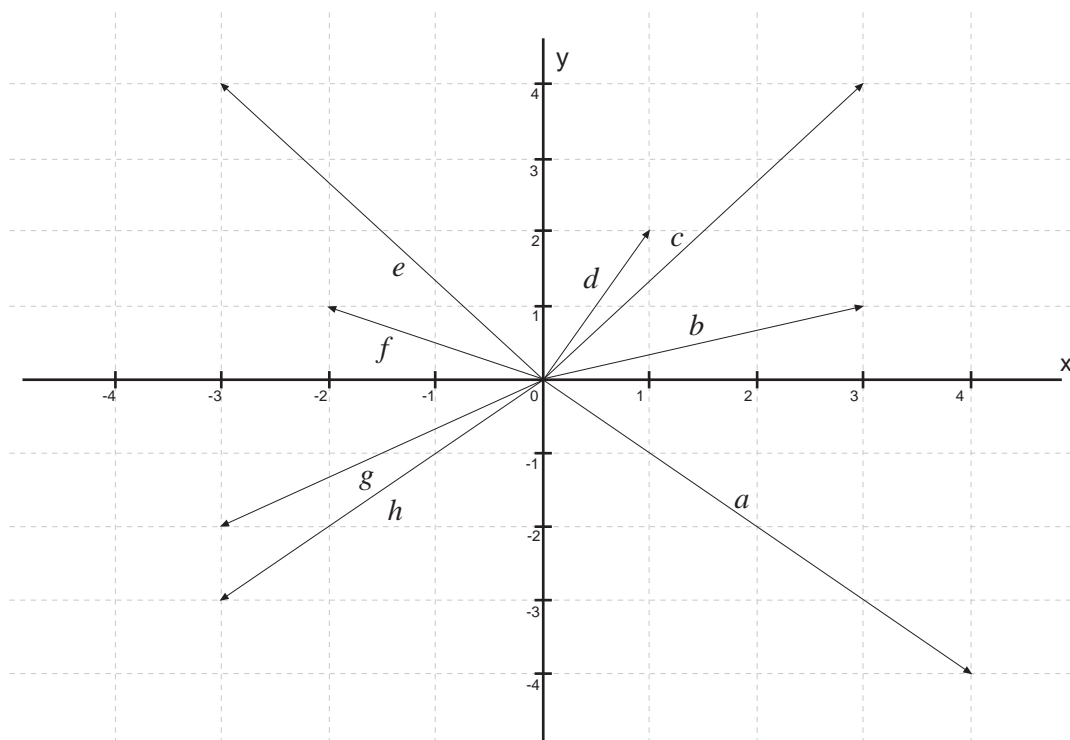
(3.) **Winkel.**

$$\varphi(a, b) := \arccos \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \arccos \frac{8}{5,7 \cdot 3,1} \approx 63^\circ$$

$$\varphi(c, d) := \arccos \frac{c \cdot d}{|c| \cdot |d|} = \arccos \frac{11}{5 \cdot 2,2} \approx 10^\circ$$

$$\varphi(e, f) := \arccos \frac{e \cdot f}{|e| \cdot |f|} = \arccos \frac{10}{5 \cdot 2,2} \approx 27^\circ$$

$$\varphi(g, h) := \arccos \frac{g \cdot h}{|g| \cdot |h|} = \arccos \frac{15}{3,6 \cdot 4,2} \approx 11^\circ$$



Die Abb. zeigt die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h} \in \mathbb{R}^2$ .

★ **Beispiel.** für einen euklidischen Vektorraum aus Funktionen.

Nicht nur die klassischen Vektorräume erlauben Skalarprodukte, sondern auch einige andere. Nehmen wir hierzu eine Menge, die aus allen stetigen Funktionen im Intervall  $[0, 1]$  besteht. Das folgende Beispiel ist allerdings ohne Grundkenntnisse der Integral- und Differentialrechnung schwer zu verdauen.

$$M : f [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V = \{f\}$$

Das Skalarprodukt definieren wir über die *Integration* im Intervall – was genau Integration ist, wird später in der *Analysis* folgen –, dann müssen wir sehen, dass die geforderten Gesetzmäßigkeiten gültig bleiben.

$$f \cdot g := \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

- $f \cdot f \geq 0$  ist gültig, denn  $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$
- $f \cdot g = g \cdot f = \int_0^1 g(x) \cdot f(x) dx$

Die *Norm* einer Funktion wird ähnlich dem *Betrag* des Vektors definiert.

$$|f| := \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}$$

Mit den Funktionen  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x$  kann dies konkret verdeutlicht werden.

$$|f| = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \sqrt{\left. \frac{1}{5} x^5 \right|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

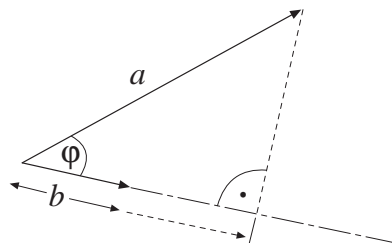
$$|g| = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{\left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$d_{(f,g)} := |f - g| = \sqrt{\int_0^1 (x^2 - x)^2 dx}$$

$$\varphi_{(f,g)} := \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x dx}{|f| \cdot |g|} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{15}}}$$

### 12.8.1 Orthogonale Projektionen

Der Begriff der Orthogonalität wurde bereits eingeführt: Er bedeutet „rechtwinklig“ und er kennzeichnet Vektoren, die im Raum *senkrecht* zueinander stehen. Für solche Vektoren wird das Skalarprodukt bekanntlicherweise immer zu null. Nun soll der Begriff der **orthogonalen Projektion** vorgestellt werden. Ohne genauere Kenntnisse ahnt man schon, dass etwas genau so projiziert wird, dass ein rechter Winkel entsteht. Und dem ist auch tatsächlich so, denn hat man zwei Vektoren  $a$  und  $b$  im Raum – die einen Winkel  $\varphi$  einschließen, der sinnigerweise *nicht*  $90^\circ$  ist –, so kann  $a$  auf  $b$  projiziert werden, so dass die Projektion mit  $a$  einen rechten Winkel bildet.



Die Abb. zeigt die Projektion  $a$  auf  $b$ .

Berechnet wird die orthogonale Projektion, die ich in Ermangelung eines bekannten Symbols mit  $a \rightarrow b$  bezeichnen werde, mit der folgenden Formel.

$$a \rightarrow b = \frac{a \cdot b}{|b|}$$

Ist der Winkel  $\varphi$  bekannt, so kann „ $a \cdot b$ “ mit „ $|a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$ “ substituiert werden.

$$a \rightarrow b = |a| \cdot \cos \varphi$$

Eine orthogonale Projektion ist also nichts anderes als eine Abbildung, die zwei Vektoren im Raum auf einen Wert  $\in \mathbb{R}$  abbildet. Nehmen wir dazu kurz ein exemplarisches Beispiel mit den Vektoren  $a = (1, 0, 0)$  und  $b = (3, 2, 1)$ , so folgt daraus:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 3 \\ |b| &= \sqrt{14} \\ a \rightarrow b &= \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0,8 \end{aligned}$$

### 12.8.2 Vektor- und Spatprodukt

Es soll kurz das *Vektorprodukt* wiederholt werden, um daraufhin das *Spatprodukt* zu erläutern. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren  $a, b \in V$  ergibt einen neuen Vektor  $c$ , der *orthogonal* zu  $a$  und  $b$  ist. Die Länge von  $c$  bestimmt sich über die Formel:

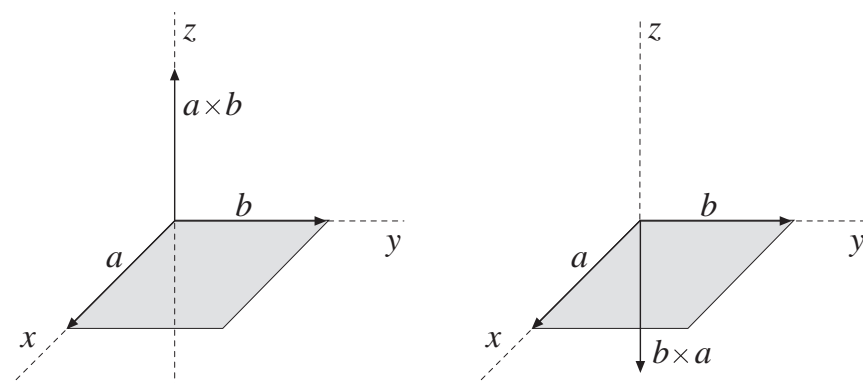
$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$$

Soviel sei bekannt. Auch das Herleiten der Richtung von  $c$  über die umständliche „Schraubenregel“ wurde erwähnt. Das geht aber genauso gut über eine Determinante. Betrachten wir dazu ein Beispiel im Raum.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

Der Vektor  $a$  ist der Einheitsvektor  $e_1$  der  $x$ -Achse und  $b$  ist  $e_2$  auf der  $y$ -Achse. Der Winkel steht somit schon fest, auch die Formel zeigt dies.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} \\ \cos \varphi &= 0 \\ \varphi &= 90^\circ \end{aligned}$$



Die Abb. zeigt die Vektorprodukte von  $a$  und  $b$ .

Jetzt zur Lösung mit einer Determinante.

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = 0 + 0 + e_3 - (0 + 0 + 0) = e_3$$



★ **Beispiel.** mit beliebigen Vektoren.

Gegeben sind zwei Vektoren, an denen rasch das Vektorprodukt über die Determinante berechnet werden soll.

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

...Es warte die Determinante!

---


$$I. \quad a \times b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = -4e_1 + 0 + 2e_3 - (0 + 3e_1 + 8e_2) = -7e_1 - 8e_2 + 2e_3$$

$$a \times b = -\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$


---

$$II. \quad b \times a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$b \times a = 3e_1 + 8e_2 + 0 - (2e_3 - 4e_1 + 0) = 7e_1 + 8e_2 - 2e_3$$

$$b \times a = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$


---

⇒ EIGENSCHAFTEN DES VEKTORPRODUKTS

Einige Eigenschaften sind bereits bekannt und trivial, andere wiederum nicht.

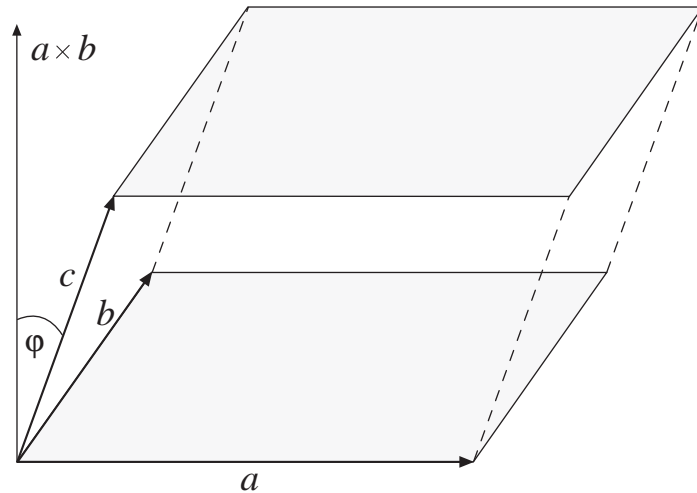
- i.  $a \parallel b \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow |a \times b| = 0$
- ii.  $a \nparallel b = \exists c : a \times b \Rightarrow a, b, c \text{ sind linear unabhängig.}$
- iii.  $a \times b = -b \times a$
- iv.  $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b) = a \times (\lambda b)$
- v.  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

### ⇒ DAS SPATPRODUKT

Unter dem Spatprodukt versteht man das Skalarprodukt eines Vektors mit einem Vektorprodukt. Somit treten hier drei Vektoren auf, die durch die Verknüpfung auf eine skalare Größe abgebildet werden.

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cdot \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a \times b) \cdot c &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Der Betrag des Vektorprodukts entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms – ein alter Hut. Projizieren wir auf unsere Vorstellung dieses Parallelogramm, multiplizieren es mit einer Strecke im Raum, dann meldet sich spontan unser mathematisches Kompendium, wo unter dem Eintrag „Volumen ebenflächiger Körper“ die Berechnungsformel  $V = G \cdot h$  erscheint.



Die Abb. zeigt das Spatprodukt  $(a \times b) \cdot c$

Summa summarum bildet das Spatprodukt aus den Vektoren  $a, b, c$  eine skalare Größe, die exakt dem Volumen des gebildeten Spats<sup>66</sup> entspricht.

$$\begin{aligned} V &= \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} \\ &= |(a \times b) \cdot c| \\ &= \underbrace{|a \times b|}_G \cdot \underbrace{|c| \cdot \cos \varphi}_h \end{aligned}$$

Das Spatprodukt lässt sich besonders einfach über eine Determinante berechnen.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

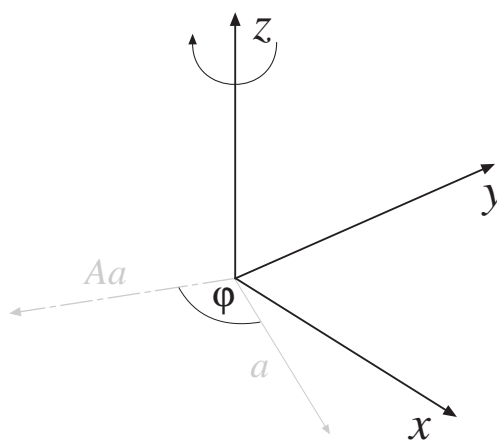
<sup>66</sup>Ein Spat wird auch als *Parallelepiped* bezeichnet.

### 12.8.3 Orthogonale Abbildungen

Wir betrachten nun eine besondere Abbildung einer  $A^{m \times n}$ -Matrix mit einem Vektor  $x \in \mathbb{R}^m$  auf ein Bild  $y \in \mathbb{R}^n$ . Das könnte eine Abbildung folgender Art sein:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} : \\ : \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dies soll betonen, dass sich die  $z$ -Achse des Urbilds  $x$  *nicht* ändert. Die Abbildung  $A$  zeichnet sich nur durch eine Drehung um  $\varphi$  um die  $z$ -Achse aus.



Die Abb. zeigt die Abbildung  $y = Ax$

Eine Matrix  $A$  heißt *orthogonal*, da sie das Skalarprodukt zweier Vektoren unverändert lässt.

$$a \cdot b = (Aa) \cdot (Ab)$$

Bei solchen Abbildungen ändert sich die Länge natürlich nicht. Eine Spiegelung um die Ebene  $(y, z)$  wäre beispielsweise solch eine Abbildung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es wird gezeigt, dass diese Matrix für beliebige Vektoren  $a, b$  orthogonal ist.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$Aa = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$Ab = \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$(Aa) \cdot (Ab) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

✱ **Lemma.** *Eigenschaften orthogonaler Matrizen*

$$\begin{aligned}
 i. \quad & A \text{ ist orthogonal} \Leftrightarrow A \cdot A^T = E \\
 ii. \quad & \det(A \cdot A^T) = \det A \cdot \det A^T \\
 & = (\det A)^2 = 1 \\
 iii. \quad & \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \\
 iv. \quad & \det A = \pm 1
 \end{aligned}$$

Da bei orthogonalen Matrizen stets die Inverse existiert, folgt daraus, dass die Transponierte gleich der Inversen ist.

$$\begin{aligned}
 A^{-1}AA^T &= A^{-1}E \\
 EA^T &= A^{-1} \\
 A^T &= A^{-1}
 \end{aligned}$$

#### 12.8.4 Quadratische Formen

Im Folgenden soll zu einer quadratischen Matrix die zugehörige quadratische Form ermittelt werden. Diese wird definiert als:

$$\begin{aligned}
 Q(x) &:= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^T A x \\
 Q(x) &:= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

★ **Beispiel.** *einer quadratischen Form in  $\mathbb{R}^2$ .*

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\
 Q(x) &:= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 5x_1 + 6x_2 \\ 0 + 5x_2 \end{pmatrix} \\
 Q(x) &= 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2
 \end{aligned}$$

Wir werden nun sehen, dass zu einer quadratischen Form mehrere Matrizen existieren. Dazu bilden wir mit den Koeffizienten aus der quadratischen Form quasi „rückwärts“ eine Matrix. Für  $2 \times 2$ -Matrizen gilt:

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \mathbf{a}x_1^2 + \mathbf{b}x_1x_2 + \mathbf{c}x_2^2 \\
 \Leftrightarrow A_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \frac{\mathbf{b}}{2} \\ \frac{\mathbf{b}}{2} & \mathbf{c} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Für unser Beispiel können wir so eine passende Matrix  $A_1$  für die quadratische Form herleiten – und diese Matrix ist nicht identisch mit der ursprünglichen Matrix, von der  $Q(x)$  gebildet wurde.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ Q(x) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} \\ Q(x) &= 5x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2 \end{aligned}$$

Wie es sich erraten lässt, bilden alle Matrizen mit komplementären Nebendiagonalen dieselbe quadratische Form. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass sich Matrizen stets symmetrisieren lassen.

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T) \Rightarrow A_1^T = A_1$$

★ **Beispiel.** einer quadratischen Form in  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ Q(x) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} x_1 + & & 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 - & x_3 \\ & -2x_2 + & 3x_3 \end{pmatrix} \\ Q(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3 \end{aligned}$$

Um aus den Skalaren der quadratischen Form wieder eine passende Matrix zu kreieren, wendet man dasselbe Prinzip an, welches auch bei  $A^{2 \times 2}$ -Matrizen funktioniert hat.

$$\begin{aligned} Q(x) &= \mathbf{a}x_1^2 + \mathbf{b}x_2^2 + \mathbf{c}x_3^2 + \mathbf{d}x_1x_2 + \mathbf{e}x_1x_3 + \mathbf{f}x_2x_3 \\ \Leftrightarrow A_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \frac{\mathbf{d}}{2} & \frac{\mathbf{e}}{2} \\ \frac{\mathbf{d}}{2} & \mathbf{b} & \frac{\mathbf{f}}{2} \\ \frac{\mathbf{e}}{2} & \frac{\mathbf{f}}{2} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### ⇒ HAUPTACHSENTTRANSFORMATION

Eine Hauptachsentransformation von  $A$  ist eine Koordinatentransformation mit einer orthogonalen Matrix. Die Matrix  $A$  ist somit gegeben und die zugehörige quadratische Form  $Q(x)$  ist auch bekannt. Nun ist eine Transformationsmatrix  $B$  gesucht, so dass  $x = B\tilde{x}$  mit:

$$Q(\tilde{x}) = s_1x_1^2 + s_2x_2^2 + \dots + s_nx_n^2$$

Um dieses Problem zu lösen, sind einige Schritte notwendig.

- I. Die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A$  sind zu finden.
- II. Die zugehörigen Eigenvektoren  $v_i$  – alle linear unabhängigen Vektoren – von  $A$  ebenfalls.
- III. Eigenvektoren werden normiert, d.h.  $\frac{v_i}{|v_i|}$
- IV. Die gesuchte Matrix  $B = (v_1, \dots, v_n)$ .

Das soll an einem Beispiel illustriert werden. Nehmen wir dazu die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$$

I.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (5 - \lambda)^2 - 9 &= 0 \\ \lambda^2 - 10\lambda + 25 - 9 &= 0 \\ \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 8 \end{aligned}$$

II.i.

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 E &= A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ 3y_1 + 3y_2 &= 0 \\ y_1 &= -y_2 \end{aligned}$$

Damit haben wir die ersten Eigenvektoren bestimmt. Nun zu den zweiten.

II.ii.

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 E &= A - 8E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ -3y_1 + 3y_2 &= 0 \\ y_1 &= y_2 \end{aligned}$$

Gut, die möglichen Eigenvektoren sind gesetzt, nun wählen wir zwei Stück aus und normieren sie.

III

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |v_1| &= \sqrt{2} & \rightarrow w_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ |v_2| &= \sqrt{2} & \rightarrow w_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IV Mit den normierten Spaltenvektoren  $w_1$  und  $w_2$  haben wir nun die gesuchte Matrix erhalten.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

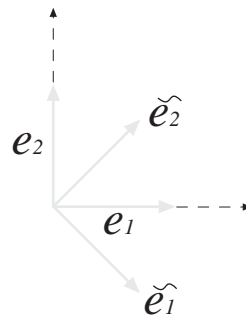
Es soll natürlich geprüft werden, ob die erhaltene Matrix tatsächlich den Anforderungen genügt.

$$B\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} & \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} & \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}} \\ x_2 &= -\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \text{Einsetzen in } Q(x)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 \\ &= 5\left(\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5\left(-\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{5}{2}(\tilde{x}_1^2 + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2) + \frac{5}{2}(\tilde{x}_1^2 - 2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2) + 6\left(\frac{\tilde{x}_2^2}{2} - \frac{\tilde{x}_1^2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 3\right)\tilde{x}_1^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 3\right)\tilde{x}_2^2 \\ &= \underbrace{2\tilde{x}_1^2 + 8\tilde{x}_2^2}_{\text{Eigenvektoren}} \end{aligned}$$

Anwendung von  $B$  auf Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^2$ .



Die Abb. zeigt

$$\begin{aligned} Be_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \tilde{e}_1 \\ Be_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \tilde{e}_2 \end{aligned}$$

Die normierten Eigenvektoren sind neue Basisvektoren, die um  $45^\circ$  gedreht wurden. Die Matrix  $B$  entspricht somit der bekannten Transformationsmatrix:

$$B \cong \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

## 13 Analysis

Die Analysis beschäftigt sich zum Großteil mit der Untersuchung von Funktionen, d.h. von Abbildungen, die eine Größe in eindeutiger Abhängigkeit einer anderen Größe darstellen. Das kann z.B. der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung, einer beliebigen Wachstumsgröße oder sonst eine eindeutige Zuordnung sein.

Eine *Funktion* ist eine Abbildung, die einem  $x$  aus dem *Definitionsbereich*  $D$  genau einen Funktionswert  $y$  aus dem *Wertebereich*  $W$  zuordnet.

$$\begin{array}{ccc} f : & D & \longrightarrow W \\ & x & \longmapsto y \end{array}$$

Als Definitions- und Wertebereiche werden i.d.R. Intervalle von  $\mathbb{R}$  betrachtet, wobei aber auch andere Zuordnungen möglich sind. Eine Funktion kann *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* sein, muss es aber nicht. Betrachtet man die Normalparabel  $y = x^2$  mit  $D$  und  $W$  gleich  $\mathbb{R}$ , so ist diese Funktion weder injektiv noch surjektiv. Setzt man  $W$  hingegen gleich  $\mathbb{R}_0^+$ , so ist sie zumindest surjektiv.

### 13.1 Allgemeine Eigenschaften von Funktionen

Bei der Untersuchung von Funktionen spielen gewisse Eigenarten eine besondere Rolle. So kann z.B. von Interesse sein, wie viele **Nullstellen** die Funktion besitzt und wo sich diese befinden. Unter einer Nullstelle versteht man die Punkte, wo der Graph die Abszisse schneidet. Man erhält sie, indem man die Funktionsgleichung gleich null setzt.

$$f(x) = 0$$

Das ist bei den meisten Funktionen nicht besonders aufwendig, und so würde man eine Gleichung wie  $y = 4x + 1$  schnell nach  $x = -\frac{1}{4}$  umformen und die einzige Nullstelle erhalten. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist das **Symmetrieverhalten** einer Funktion. Hier unterscheidet man zwischen *geraden* und *ungeraden* Funktionen.

$$\begin{array}{ll} \textbf{gerade:} & \forall x \in D : f(-x) = f(x) \\ \textbf{ungerade:} & \forall x \in D : f(-x) = -f(x) \end{array}$$

Anders ausgedrückt ist eine *gerade* Funktion an der Ordinate gespiegelt und eine *ungerade* Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Simples Beispiel ist die Funktion  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wobei die Funktion für gerade  $n$  gerade und für ungerade  $n$  ungerade ist. Weiterhin ist die **Monotonie** einer Funktion von essentieller Bedeutung. Mit dieser Worthülse wird das Steigungsverhalten einer Funktion illustriert. Da allerdings die wenigsten Funktionen in ihrem gesamten Definitionsbereich monoton sind, d.h. stetig wachsend oder fallend, betrachtet man meist die Monotonie einer Funktion in einem bestimmten Intervall.

$$\begin{array}{ll} \textbf{monoton steigend} & \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2) \\ \textbf{streng monoton steigend} & \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2) \\ \textbf{monoton fallend} & \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2) \\ \textbf{streng monoton fallend} & \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2) \end{array}$$

Die Normalparabel  $y = x^2$  ist demnach für  $D = \mathbb{R}_0^+$  *streng monoton wachsend* und für  $D = \mathbb{R}_0^-$  *streng monoton fallend*. Die Monotonie einer Funktion wird später bei der Bildung der Umkehrfunktion noch eine besondere Rolle spielen.



Einige Funktionen haben die Eigenschaft, dass sich die Wertebereiche periodisch wiederholen. Man spricht von **Periodizität**, wenn für eine Funktion mit der Periode  $p$  folgendes gilt:

$$f(x) = f(x \pm p)$$

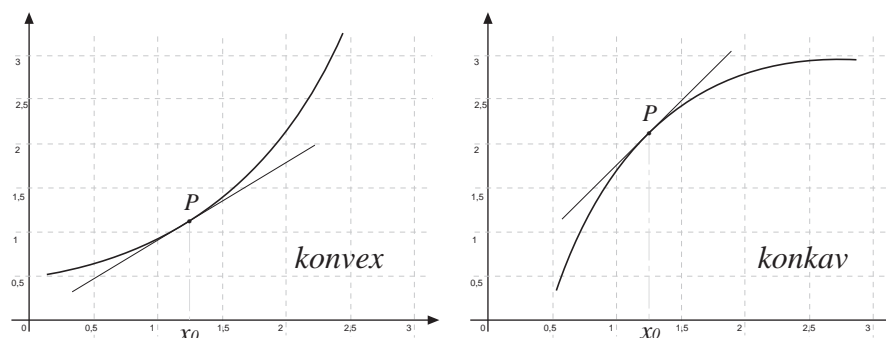
Prominentes Beispiel sind die trigonometrischen Funktionen, aber es lässt sich auch eine Funktion kreieren, deren beliebiges Intervall periodisch auf eine neue Funktion abgebildet wird. Das könnte der Fall sein, wenn ein Intervall einer linearen Funktion periodisch auf eine neue Funktion so abgebildet wird, dass diese neue Funktion das Aussehen von einem Sägeblatt verpasst bekommt.

### \* KONVEX UND KONKAV GEKRÜMMTE KURVEN

Das Krümmungsverhalten eines Graphen kann man mit den Begriffen *konkav* und *konvex* beschreiben. Von einer konkaven Kurve spricht man, wenn die Kurve auf einem bestimmten Intervall durch eine Linkskrümung charakterisiert wird. Analog dazu die konvexe Kurve bei einer Rechtskrümung. Rechnerisch erhält man diese Eigenschaft durch die zweite Ableitung. Eine Ableitung gibt die Steigung einer Funktion an, somit ist auch die Ableitung wieder eine Funktion, dessen Steigung erneut durch eine Ableitung bestimmt werden kann.

$f''(x_0) > 0$  Die Steigung der Tangente, der ersten Ableitung, nimmt in  $P$  zu.  
Der Graph ist somit in  $P$  *konvex*.

$f''(x_0) < 0$  Die Steigung der Tangente, der ersten Ableitung, nimmt in  $P$  ab.  
Der Graph ist somit in  $P$  *konkav*.



Die Abb. zeigt konvexe und konkave Kurven.

### \* DIE INVERSE FUNKTION $f^{-1}(x)$

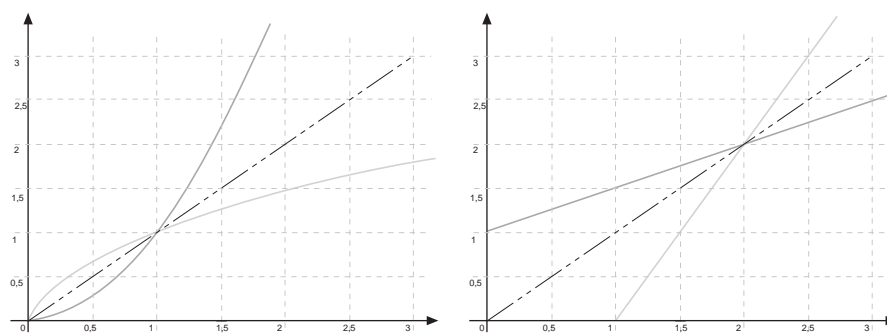
So wie eine Funktion jedem  $x \in D$  genau ein  $y \in W$  zuordnet, so kann auch jedem bestehenden  $y$  wieder ein  $x$  zugeordnet werden – allerdings sind dann Definitions- und Wertebereich vertauscht. Natürlich funktioniert dies nur bei *bijektiven* Funktionen, da ansonsten sich für ein  $y$  gleich mehrere  $x$  bewerben täten. So kommen wir wieder zur Monotonie zurück. Ist eine Funktion streng monoton wachsend oder fallend, dann lässt sich stets die Inverse bilden. Ist das nicht der Fall, dann kann die Inverse nur auf streng monotonen Teilintervallen gebildet werden. Geometrisch erhält man die Inverse, wenn man in der Mitte des jeweiligen Quadranten eine „Spiegelachse“ bildet und die Funktion daran spiegelt. Berechnen wird sie, indem die Funktion nach  $x$  aufgelöst wird und daraufhin die Variablen  $x$  und  $y$  vertauscht werden.

## ★ Beispiel.

Es sollen die Umkehrfunktionen der folgenden zwei Funktionen auf dem Definitionsbereich der positiven reellen Zahlen gebildet werden.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \\ f_2 : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}x + 1 \end{aligned}$$

Die Inversen sind schnell gebildet, denn  $y = x^2$  wird zu  $y^{-1} = \sqrt{x}$  umgeformt und  $y = \frac{1}{2}x + 1$  transformiert sich zu  $y^{-1} = 2x - 2$ .



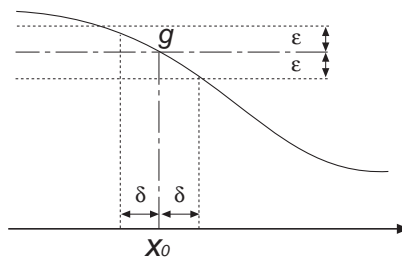
Die Abb. zeigt die beiden Funktionen und deren Inverse.

## 13.2 Grenzwert einer Funktion

Unter dem *Grenzwert*  $g$  an einer beliebigen Stelle  $x_0 \in D$  versteht man den Funktionswert der konvergenten Folge  $x_n$ , der sich an die Stelle  $x_0$  beliebig annähert. In anderen Worten: Man betrachtet eine beliebige Stelle  $x_0$  des Definitionsbereichs und untersucht – entweder von *links* oder von *rechts* – das Verhalten der Funktionswerte einer konvergenten Folge  $x_n$ , die sich auf  $x_0$  bewegt. Stimmen die Grenzwerte von links und von rechts überein, so wird der Funktion an der Stelle  $x_0$  der Grenzwert  $g$  zugeordnet.

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

Aus dieser Definition folgt direkt ein wichtiges Kriterium für Grenzwerte, welches die nun folgende Abbildung verdeutlichen soll.



Eine Funktion  $y = f(x)$  hat mit  $x \rightarrow x_0$  genau dann den Grenzwert  $g$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt:  $|f(x) - g| < \varepsilon$  für  $|x - x_0| < \delta$ .

Betrachtet man für  $x_0$  nicht einen handlichen Wert, sondern  $\pm\infty$ , so kommen wir zur Definition des Grenzwertes einer Funktion. Anders ausgedrückt, wir lassen  $x_0 \rightarrow \pm\infty$  laufen und betrachten dabei den Grenzwert der Funktion. Ob der Grenzwert dabei vielleicht gar nicht existiert und die Funktion bis in alle Ewigkeit weiter wächst, oder ob sie sich asymptotisch einem Wert annähert, hängt selbstredend von der Funktion an sich ab. Wir definieren: Eine Funktion  $y = f(x)$  hat mit  $x$  nach  $\infty$  einen Grenzwert  $g$ , wenn zu allen  $x$ -Folgen, die über alle Grenzen gehen, alle zugehörigen Funktionswertfolgen konvergent sind und denselben Grenzwert  $g$  haben. Das Kriterium ist folgendes.

Eine Funktion  $y = f(x)$  hat mit  $x \rightarrow \infty$  genau dann den Grenzwert  $g$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein positives  $n$  gibt, so dass gilt:  $|f(x) - g| < \varepsilon$  für alle  $|x| > n$ .

✱ **Lemma.** *Rechenregeln für Grenzwerte.*

Bei der Bestimmung von Grenzwerten sind folgende Rechenregeln besonders nützlich. Bei den nachfolgenden Beispielen werden einige der Regeln angewandt.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} [\lambda \cdot f(x)] &= \lambda \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \\
 \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\
 \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) \\
 \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{mit } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \\
 \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \\
 \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n &= \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n
 \end{aligned}$$

★ **Beispiel.** *für die Berechnung von Grenzwerten.*

An einigen Beispielen sei dieser Zusammenhang verdeutlicht. Man beachte, dass die Funktion zur Grenzwertbestimmung ggf. umgeformt werden muss.

$$\begin{aligned}
 i. \quad \lim_{x \rightarrow -3} x^3 &= -27 \\
 ii. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+10x}{2-x} &= 2 \\
 iii. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4+10x}{2-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}+10}{\frac{2}{x}-1} = -10 \\
 iv. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{6x^2-5}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 6 - \frac{5}{x^2} \right) = 6 \\
 v. \quad \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2+7x-5}{8x^3+x^2+1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow (-1)} (3x^2+7x-5)}{\lim_{x \rightarrow (-1)} (8x^3+x^2+1)} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow (-1)} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow (-1)} 7x + \lim_{x \rightarrow (-1)} (-5)}{\lim_{x \rightarrow (-1)} 8x^3 + \lim_{x \rightarrow (-1)} x^2 + \lim_{x \rightarrow (-1)} 1} \\
 &= \frac{3 \cdot \lim_{x \rightarrow (-1)} x^2 + 7 \cdot \lim_{x \rightarrow (-1)} x - 5}{8 \cdot \lim_{x \rightarrow (-1)} x^3 + \lim_{x \rightarrow (-1)} x^2 + 1} \\
 &= \frac{3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) - 5}{8 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 1} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

## \* LINKSSEITIGER UND RECHTSSEITIGER GRENZWERT

Nachdem nun verdeutlicht wurde, dass man sich  $x_0$  von links und auch von rechts nähern kann, der Grenzwert nicht zwangsläufig identisch sein muss, definieren wir nun offiziell den *links-* und *rechtsseitigen* Grenzwert einer Funktion.

- Es sei  $\dot{x} < x_0$  und die Funktion  $f$  ist definiert auf  $(\dot{x}, x_0)$ . Ist der Grenzwert  $g$  für  $x \rightarrow x_0$  bestimmt, so nennt man ihn den **linksseitigen Grenzwert** von  $f$  an  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = g$$

- Es sei  $\dot{x} > x_0$  und die Funktion  $f$  ist definiert auf  $(x_0, \dot{x})$ . Ist  $g$  für  $x \rightarrow x_0$  bestimmt, so nennt man ihn den **rechtsseitigen Grenzwert** von  $f$  an  $x_0$ .

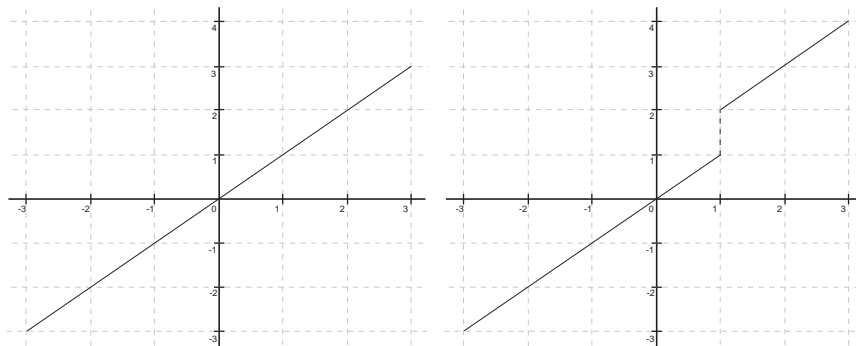
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = g$$

- Existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert, und gilt  $f(x_0^-) = f(x_0^+) = g$ , so nennt man  $g$  den **Grenzwert** von  $f$  an  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

Betrachten wir dazu eine unstetige Funktion und nähern uns an die Stelle  $x_0 = 1$  von links und von rechts an. Wie man schon an der Abbildung erkennt, sollten die Grenzwerte verschieden sein, so dass an der Stelle  $x_0$  zwar jeweils ein links- und rechtsseitiger Grenzwert existiert, die Funktion an der Stelle  $x_0$  aber keinen Grenzwert besitzt.

$$f(x) = x \quad \dot{f}(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Die Abb. zeigt zeigt die beiden Funktionen  $f(x)$  und  $\dot{f}(x)$ .

Für den linksseitigen Grenzwert gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^- x < x_0} = f(x_0^-)$$

Angewandt auf  $\dot{f}(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = \lim_{x \rightarrow 1 x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 x < 1} x = 1 \neq f(1)$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+ x > x_0} = f(x_0^+)$$

Angewandt auf  $\dot{f}(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} = \lim_{x \rightarrow 1 x > 1} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 1 x < 1} x = 1 \neq f(1)$$

### 13.3 Elementare Funktionen

Zu den elementaren Funktionen zählen alle Funktionen, die sich durch einfache Eigenschaften auszeichnen, bei technischen Anwendung recht beliebt sind und sich meist problemlos differenzieren lassen.

#### 13.3.1 Polynomfunktionen – ganzrationale Funktionen

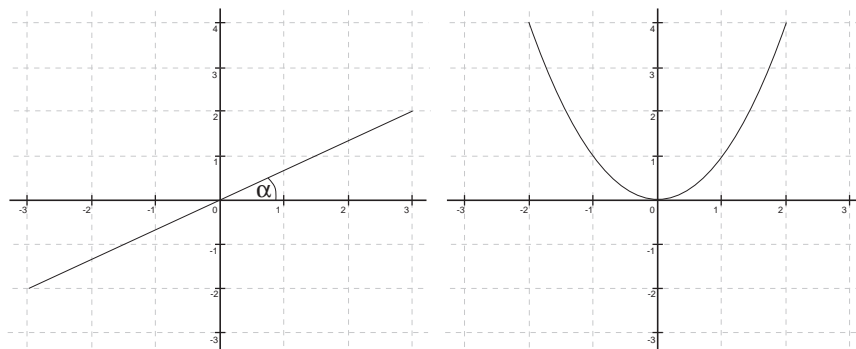
Polynomfunktionen sind reellwertige Funktionen vom folgenden Typ:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y\end{aligned}$$

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad a, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$$

Ist  $a_n \neq 0$ , dann bestimmt der höchste Exponent gleichzeitig den Grad des Polynoms.

0. Grad	$y = c$	Konstante Funktion
1. Grad	$y = a_1 x + c$	Lineare Funktion
3. Grad	$y = a_2 x^2 + a_1 x + c$	Quadratische Funktion
4. Grad	$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + c$	Kubische Funktion
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Die Abb. illustriert die Polynomfunktionen  $y = \frac{2}{3}x$  und  $y = x^2$ .

Die *konstanten* Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass alle reellen  $x$ -Werte auf einen konstanten Wert abgebildet werden. Dementsprechend ist die Steigung gleich null. Bei *linearen* Funktionen ist die Steigung  $a$  mit dem Steigungswinkel  $\alpha$  über die Beziehung  $a = \tan \alpha$  verknüpft. Die Steigung einer linearen Funktion ist immer eine Konstante, da sie sich schließlich nie ändert. Steigungen von quadratischen Funktionen werden später betrachtet. Man erkennt aber bereits am Graphen zur Normalparabel, dass die Steigung lokalen Charakter hat.

### \* VERKNÜPFUNGSTHEOREME ZUM GRAD EINES POLYNOMS

Seien  $y_n$  und  $y_m$  zwei beliebige Polynome vom Grade  $n$  und  $m$  und  $g(y)$  eine Funktion, die den Grad eines Polynoms angibt, dann gelten folgende Eigenschaften für arithmetische Verknüpfungen zweier Polynome.

$$\textbf{Addition} \quad g(y_n + y_m) \leq \max(n, m)$$

$$\textbf{Multiplikation} \quad g(y_n \cdot y_m) = n + m$$

Zwei Beispiele sollen den Zusammenhang erhellen. Mit Hilfe der Theoreme kann der Grad des resultierenden Polynoms schon vor der Verknüpfung errahnt werden.

$$\begin{aligned} (2x^3 + x^2 - 24) + (-2x^3 + 18) &= x^2 - 6 &\Rightarrow g(y_3 + y_3) &= 2 \\ (x^3 - 1) \cdot (x^2 + 1) &= x^5 + x^3 - x^2 - 1 &\Rightarrow g(y_3 \cdot y_2) &= 5 \end{aligned}$$

### \* DIE POLYNOMDIVISION

Eine Polynomfunktion lässt sich genau dann zerlegen, wenn die Funktion  $n$ -ten Grades an der Stelle  $x_1$  eine Nullstelle besitzt. Ist das der Fall, dann kann die Funktion auch durch Linearfaktoren dargestellt werden.

$$f(x) = (x - x_1) \cdot f(x)$$

Der Linearfaktor  $(x - x_1)$  bildet mit dem ersten *reduzierten* Polynom  $f(x)$  vom Grade  $n-1$  die Polynomfunktion in faktorisierte Darstellung. Kennt man die Nullstelle, dann kann das betreffende Polynom durch die sog. *Polynomdivision* reduziert werden.

#### ★ Beispiel. für eine Polynomdivision

Die folgende kubische Funktion hat an der Stelle  $f(-5) = 0$  eine Nullstelle, welche nicht vom Himmel fiel, sondern durch Probieren herausgefunden wurde. Sie kann zu einer Funktion zweiten Grades reduziert werden.

$$\begin{array}{r} f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = (x + 5) \cdot f(x) \\ f(x) = (x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 5) = x^2 + x - 2 \\ \quad - x^3 + 5x^2 \\ \hline \quad \quad x^2 + 3x \\ \quad - x^2 + 5x \\ \hline \quad \quad \quad - 2x - 10 \\ \quad \quad + 2x + 10 \\ \hline \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Fertig, nun lässt sich die Polynomfunktion durch zwei Linearfaktoren darstellen.

$$f(x) = (x^2 + x - 2)(x + 5)$$

Somit kann man z.B. bequem die zweite Nullstelle ermitteln, denn die Nullstellen des reduzierten quadratischen Polynoms sind gleichzeitig die Nullstellen der originalen kubischen Polynomfunktion.

※ **Lemma.** zu den Nullstellen eines Polynoms.

Jede ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades hat *höchstens*  $n$  Nullstellen. Sie können alle voneinander verschieden sein oder mehrfach auftreten – reell oder paarweise konjugiert komplex. Sind *genau*  $n$  Nullstellen bekannt, so kann man das Polynom auch als Produkt von Linearfaktoren darstellen.

$$f(x) = a_n \cdot \prod_{i=1}^n (x - x_i) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

### 13.3.2 Das Horner-Schema

Das Horner-Schema ist ein nützliches Utensil, immer wenn es darum geht, die Funktionswerte oder die Nullstellen einer Polynomfunktion durch sukzessive Reduzierung des Polynomgrades zu berechnen.

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Für ein beliebiges Polynom der allgemeinen Form werden die Koeffizienten in einem tabellenartigen Schema notiert. Vorher abstrahieren wir noch  $(x - x_0)$  zu  $\mathcal{S}$ .

	$a_n$	$a_{n-1}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$x_0$		$b_{n-1}x_0$	$\dots$	$b_2x_0$	$b_1x_0$	$b_0x_0$
	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	$r_{\text{rest}}$

Bevor die Mechanik des Schemas näher erläutert wird, offenbaren wir exemplarisch das Schema für eine Polynomfunktion dritten Grades.

	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
		$a_3x_0$	$(a_2 + a_3x_0)x_0$	$(a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2)x_0$
$x_0$	$\underbrace{a_3}_{b_2}$	$\underbrace{a_2 + a_3x_0}_{b_1}$	$\underbrace{a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2}_{b_0}$	$\underbrace{a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3}_{f(x_0)}$

Zugegeben, das sieht recht kompliziert aus. Aber im Grunde werden nur einfache Regeln angewendet: Den Koeffizienten der Polynomfunktion  $a_n$  bis  $a_0$  werden fein säuberlich eigene Spalten zugeordnet. Die zweite Zeile bleibt vorerst frei. Dann wird in der dritten Zeile der Koeffizient  $a_n$  gesetzt und dieser dann mit  $x_0$  multipliziert. Das Ergebnis erscheint in der zweiten Spalte unter  $a_{n-1}$ . Daraufhin wird das Ergebnis mit  $a_{n-1}$  addiert und wieder in die dritte Zeile geschrieben. Diese Prozedur wiederholt sich solange, bis der Funktionswert  $f(x_0)$  erhalten wird. Kommt als Funktionswert die Null heraus, so wurde nicht die Niete gezogen, sondern wir haben eine Nullstelle der Polynomfunktion gefunden. Ansonsten bleibt ein Rest übrig.

★ **Beispiel.**

Das folgende Polynom hat an der Stelle  $x_1 = 1$  eine Nullstelle. Mit dem Horner-Schema und dem Linearfaktor  $x - 1$  soll nun zerlegt werden.

$$f(x) = -x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x + 9$$

$x_1 = 1$	-1	6	-8	-6	9
		-1	5	-3	-9
	-1	5	-3	9	0

Kein Rest blieb übrig, somit ist das erste reduzierte Polynom dritten Grades bekannt, welches durch Ablesen folgende Gestalt hat.

$$f_1(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 9$$

Da aber alle Nullstellen interessieren, muss folglich fröhlich weiter zerhackt werden. Allerdings ist dazu eine neue reelle Nullstelle von Nöten, die entweder durch blindes Herumprobieren oder durch sog. Interpolationsverfahren<sup>67</sup> erhalten werden. Nun gut, durch Probieren findet man eine neue Nullstelle  $x_2 = 3$ , so dass das Horner-Schema mit dem Linearfaktor  $x - 3$  wieder beginnt.

$$x_2 = 3 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 5 & -3 & -9 \\ \hline & -3 & 6 & 9 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Schon wieder kein Rest? Man könnte fast meinen, dieses Polynom sei bewusst für dieses Beispiel gewählt worden. Das zweite reduzierte Polynom zweiten Grades zeigt folgende Form.

$$f_2(x) = -x^2 + 2x + 3$$

Die restlichen Nullstellen werden durch das Lösen der quadratischen Gleichung ans Licht gebracht. Auch hier könnte wieder das Horner-Schema wirken, doch bei einem so geringen Grad wäre dies ein nicht vertretbarer Aufwand.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 3) = 0$$

Da nun alle Nullstellen ihren Weg ans Tageslicht gefunden haben, kann endlich die originale Polynomfunktion in voller Pracht als Produkt von Linearfaktoren notiert werden.

$$f(x) = -1 \cdot (x - 1)(x - 3)(x + 1)(x - 3) = -(x - 1)(x + 1)(x - 3)^2$$

### ★ Beispiel.

Wie man unschwer bemerkt haben sollte, wurde im letzten Beispiel ein Polynom benutzt, welches sich ohne Mühe und Rest zerlegen ließ. Dabei handelt es sich keineswegs um den Normalfall, was das anschließende Beispiel illustrieren wird. Es sei folgendes Polynom mit  $S = (x - 5)$  gegeben – im Folgenden werden Polynome vorübergehend mit  $\mathcal{P}$ , reduzierte Polynome hingegen mit  $\mathcal{Q}$  bezeichnet.

$$\mathcal{P} = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 36$$

Die Polynome werden im Folgenden auch in anderer Form dargestellt werden<sup>68</sup>.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{Q}_1 \cdot S + r_0 \\ &= (b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0)S + r_0 \end{aligned}$$

<sup>67</sup>Näherungsverfahren, wie z.B. das *Newton-Verfahren* werden später noch beschrieben.

<sup>68</sup>Für  $\mathcal{Q}_1$  gilt der Zusammenhang  $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i+1} \cdot S + r_i$



Die Berechnung mit dem Horner-Schema soll nun beginnen.

$$x_1 = 5 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & -2 & 0 & 2 & -36 \\ \hline & 15 & 65 & 325 & 1625 \\ \hline 3 & 13 & 65 & 327 & \underbrace{1599}_{r_0} \\ \hline \end{array} \Rightarrow Q_1 = 3x^3 + 13x^2 + 65x + 327$$

$$x_1 = 5 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 13 & 65 & 327 \\ \hline & 15 & 140 & 1025 \\ \hline 3 & 28 & 205 & \underbrace{1352}_{r_1} \\ \hline \end{array} \Rightarrow Q_2 = 3x^2 + 28x + 205$$

$$x_1 = 5 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 28 & 205 \\ \hline & 15 & 215 \\ \hline 3 & 43 & \underbrace{420}_{r_2} \\ \hline \end{array} \Rightarrow Q_3 = 3x + 43$$

$$x_1 = 5 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 43 \\ \hline & 15 \\ \hline 3 & \underbrace{58}_{r_3} \\ \hline \end{array} \Rightarrow Q_4 = 3$$

Jetzt wird die Polynomformel sukzessiv ersetzt und anschließend zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= Q_1 \cdot \mathcal{S} + r_0 \\ &= (Q_2 \cdot \mathcal{S} + r_1) \mathcal{S} + r_0 \\ &= ((Q_3 \cdot \mathcal{S} + r_2) \mathcal{S} + r_1) \mathcal{S} + r_0 \\ &= (((Q_4 \cdot \mathcal{S} + r_3) \mathcal{S} + r_2) \mathcal{S} + r_1) \mathcal{S} + r_0 \\ \mathcal{P} &= ((Q_4 \cdot \mathcal{S} + r_3) \mathcal{S}^2 + r_2 \mathcal{S} + r_1) \mathcal{S} + r_0 \\ &= (Q_4 \cdot \mathcal{S} + r_3) \mathcal{S}^3 + r_2 \mathcal{S} + r_1 \mathcal{S} + r_0 \\ &= (Q_4 \cdot \mathcal{S} + r_3) \mathcal{S}^4 + r_2 + r_1 \mathcal{S} + r_0 \\ &= Q_4 \mathcal{S}^4 + r_3 \mathcal{S}^3 + r_2 \mathcal{S}^2 + r_1 \mathcal{S} + r_0 \end{aligned}$$

Abschließend kann nun die ursprüngliche Polynomfunktion durch den Linearfaktor  $\mathcal{S}$  plus Rest dargestellt werden.

$$f(x) = 3(x-5)^4 + 58(x-5)^3 + 420(x-5)^2 + 1352(x-5) + 1599$$

#### \* HORNER-SCHEMA MAL RÜCKWÄRTS!

Man kann mit dem Horner-Schema auch eine faktorisierte Polynomfunktion in die allgemeine Form zurückführen – indem man das Schema rückwärts anwendet. Genau das soll mit folgender Polynomfunktion vierten Grades geschehen.

$$\mathcal{P} = (2x^4 - 8x^3)(x + 3)$$

$$x_0 = -3 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & -2 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & -6 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$



Um zum gewünschten Polynom zu gelangen, müssen  $C_0$  bis  $C_4$  der Reihe nach ausgerechnet werden. Da  $C_0 = y_0$  ist, kann hiermit begonnen werden, so dass mit  $C_0 = 31$  einfach und schnell  $y_1$  ausgerechnet wird. Dieser Prozess wiederholt sich dann solange, bis irgendwann  $C_4$  bekannt ist. Es beginnt die sukzessive Berechnung des Polynoms vierten Grades.

$$\begin{array}{ll}
 y_0 & 31 = C_0 \\
 y_1 & 6 = 31 + 1 \cdot C_1 \\
 & C_1 = -25 \\
 y_2 & 7 = 31 + 2(-25 + 1 \cdot C_2) \\
 & -24 = 2(-25 + C_2) \\
 & -12 = -25 + C_2 \\
 & C_2 = 13 \\
 y_3 & 4 = 31 + 3(-25 + 2)(13 + 1 \cdot C_3 + 0) \\
 & -27 = 3(-25 + 2(13 + C_3)) \\
 & -9 = -25 + 2(13 + C_3) \\
 & 16 = 2(13 + C_3) \\
 & 8 = 13 + C_3 \\
 & C_3 = -5 \\
 y_4 & 39 = 31 + 4(-25 + 3)(13 + 2(-5 + C_4)) \\
 & 8 = 4(-25 + 3)(13 + 2(-5 + C_4)) \\
 & 2 = -25 + 3(13 + 2(-5 + C_4)) \\
 & 27 = 3(13 + 2(-5 + C_4)) \\
 & 9 = 13 + 2(-5 + C_4) \\
 & -4 = 2(-5 + C_4) \\
 & C_4 = 3
 \end{array}$$

Mit diesen Daten lässt sich das Polynom aus Fragmenten zusammensetzen.

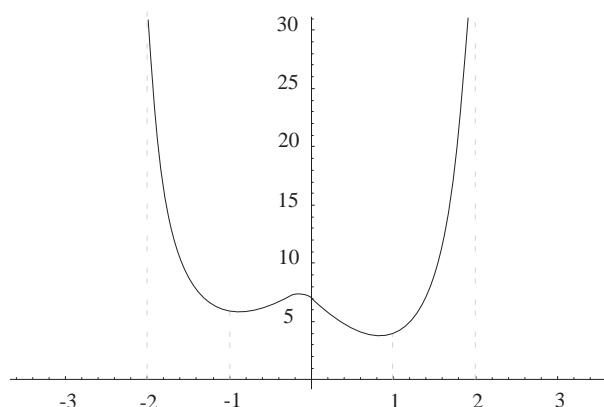
$$P_4(x) = 31 + (x + 2) \left( -25 + (x + 1)(13 + x)(-5 + (x - 1)3) \right)$$

Durch Auflösen der Klammern kann auch dieses Ungetüm wieder in die allgemeine Form transformiert werden.

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 31 + (x + 2)(-25 + 3x^3 - 8x^2 + 13x + 3x^2 - 8x + 13) \\
 &= 31 + (x + 2)(3x^3 - 5x^2 + 5x - 12) \\
 &= 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 7
 \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob das erhaltene Polynom tatsächlich den Anforderungen genügt, soll es nun als Graph gezeichnet werden. Wie man erkennt, erfüllt es in der Tat die Kriterien.

Es handelt sich dabei wohlbemerkt um ein mögliches Polynom. Letztendlich erfüllen schließlich unendlich viele Polynome die geforderten Kriterien, so dass man nicht fälschlicherweise annehmen sollte, für diese aus dem Hut gezauberte Messreihe gäbe es nur *ein einziges* Polynom.



Die Abb. illustriert das angenäherte Polynom.

### 13.3.4 Gebrochenrationale Funktionen

Als *gebrochenrationale* Funktionen werden Quotienten zweier Polynomfunktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  bezeichnet. Mit dieser Definition können *ganzrationale* und *gebrochenrationale* Funktionen zu *rationalen* Funktionen zusammengefasst werden – indem ganzrationale als gebrochenrationale Funktionen mit einem konstanten ( $c = 1$ ) Polynom im Nenner betrachtet werden.

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^m b_i x^i} \quad a, b, x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}_0$$

Es fällt auf, dass die Nullstellen des Nennerpolynoms gleichzeitig die Polstellen von  $y$  sind. Ferner wird unterschieden zwischen *echt* ( $m > n$ ) und *unecht* ( $m \leq n$ ) gebrochenrationalen Funktionen. Ist also der Grad des Polynoms im Nenner größer als der des Polynoms im Zähler, so spricht man von *echt* gebrochenrationalen Funktionen. Die Nullstellen von  $y$  befinden sich überall dort, wo  $u(x) = 0$  und  $v(x) \neq 0$  ist.

#### ★ Beispiel.

Es sollen die Null- und Polstellen der folgenden rationalen Funktion ermittelt werden.

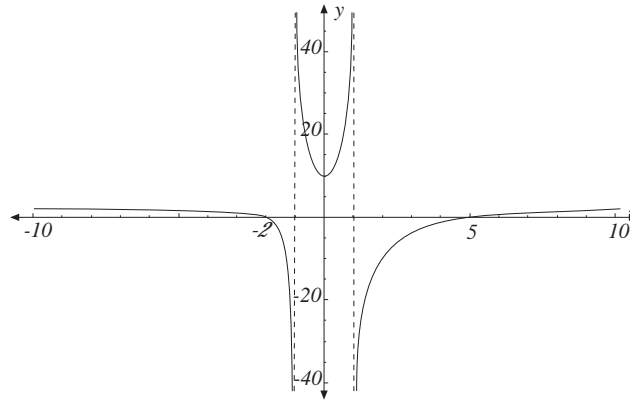
$$y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 1}$$

Es handelt sich nach Definition um eine *unecht* gebrochenrationale Funktion, die nun in Linearfaktoren zerlegt wird, um Null- und Polstellen einfach abzulesen<sup>69</sup>.

$$y = \frac{(x - 5)(x + 2)}{(x + 1)(x - 1)}$$

<sup>69</sup>Die pq-Formel wäre auch möglich, doch wer ballert schon mit Kanonen auf kleine Polynome.

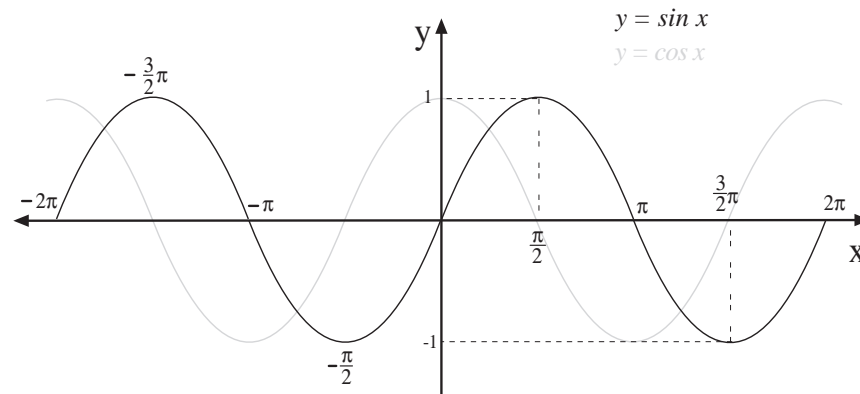
Die Funktion hat somit bei  $x_0 = 1$  und  $x_1 = -1$  die Pol- und bei  $x_3 = 5$  und  $x_4 = -2$  die Nullstellen, man auch bei der Abbildung sieht.



Die Abb. illustriert die Pol- und Nullstellen von  $y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 1}$ .

### 13.3.5 Trigonometrische Funktionen

Nachdem im Abschnitt zu den trigonometrischen Grundlagen in Kapitel 11.1 der Zusammenhang zwischen Einheitskreis und Sinus- bzw. Kosinusfunktion erklärt wurde, sollen nun die periodischen Funktionen an sich untersucht werden.



Die Abb. illustriert die Sinus- und Kosinusfunktion.

Die Nullstellen der Sinusfunktion  $y = \sin x$  liegen bei  $x = \pi \cdot n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , bei der Kosinusfunktion hingegen bei  $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Ferner existieren noch die Tangens- und Kotangensfunktionen, die sich aus den Sinus- und Kosinusfunktionen bilden lassen.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

Diese Funktionen sollen später bei der „Kurvendiskussion“ noch eingehender untersucht werden.

#### \* EIGENSCHAFTEN TRIGONOMETRISCHER FUNKTIONEN

Die auffälligste Eigenschaft zwischen der Sinus- und Kosinusfunktion ist, dass die Kosinuskurve letztendlich eine um  $\frac{\pi}{2}$  verschobene Sinuskurve ist. Daher gelten die trivialen Beziehungen.

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \quad \cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

Betrachtet man den Einheitskreis und trägt einen beliebigen Winkel  $\varphi \neq n \cdot 90^\circ$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  ab, so erhält man bekanntlich ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten  $a = \sin x$ ,  $b = \cos x$  und  $c = 1$ . Da auch hier der Satz des Pythagoras gilt, halten wir darum eine weitere Eigenschaft in unseren Händen.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Eine besondere Eigenschaft der Funktionen ist natürlich die Periodizität, die mit der Periode  $2\pi$  wirkt.

$$\begin{aligned} y &= \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ y &= \sin(x + 2\pi) = \sin x \\ y &= \tan(x + 2\pi) = \tan x \\ y &= \cot(x + 2\pi) = \cot x \end{aligned}$$

Aus dem Einheitskreis folgen direkt die folgenden Beziehungen.

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}$$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen seien nun angeführt. Bei den Ableitungen der Tangens- und Kotangensfunktion greift die Quotientenregel, die im Abschnitt zur Differentialrechnung noch näher erläutert wird.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

#### \* ADDITIONSTHEOREME TRIGONOMETRISCHER FUNKTIONEN

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin(\alpha + \beta) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ (2) \quad \cos(\alpha + \beta) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen lassen sich dann auch gewisse Beziehungen herleiten.

$$\begin{aligned} (1) \quad \cos(\pi + x) &= \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cdot \cos x - \underbrace{\sin \pi}_0 \cdot \sin x \\ &= -\cos x \\ (2) \quad \sin(\pi + x) &= \underbrace{\sin \pi}_0 \cdot \cos x + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cdot \sin x \\ &= -\sin x \\ (3) \quad \cos(\pi - x) &= \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cdot \cos x + \underbrace{\sin \pi}_0 \cdot \sin x \\ &= \cos x \\ (4) \quad \sin(\pi - x) &= \underbrace{\sin \pi}_0 \cdot \cos x - \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cdot \sin x \\ &= \sin x \end{aligned}$$

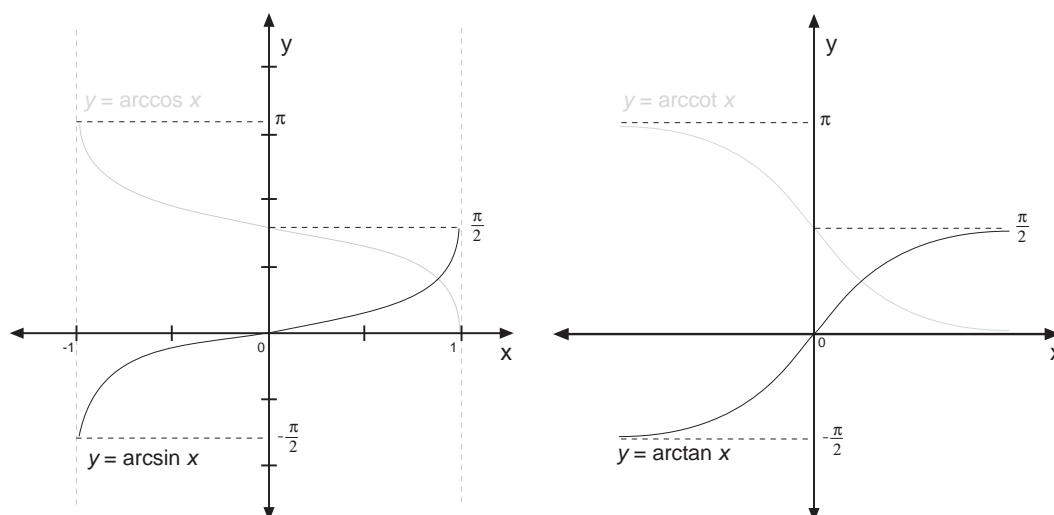
## \* TRIGONOMETRISCHE UMKEHRFUNKTIONEN

Sollen die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen gebildet werden, so muss beachtet werden, dass aufgrund der Periodizität nur ein bestimmtes *monotones* Intervall von  $\mathbb{R}$  gewählt werden kann, auf dem die Umkehrfunktion gebildet werden darf – ansonsten würden einem  $x$  mehrere Abbilder zugeordnet, was gegen den Begriff der Funktion selbstredend verstößt. Wir wählen die folgenden Intervalle der Funktionen und erhalten damit eindeutige Intervalle der Umkehrfunktionen.

$\cos x$	$[0, \pi]$	$\arccos x$	$[-1, 1]$
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\arctan x$	$(-\infty, \infty)$
$\cot x$	$(0, \pi)$	$\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, \infty)$

Man erkennt, dass sich nur die Funktionen  $\arctan$  und  $\operatorname{arccot}$  auf  $(-\infty, \infty)$  differenzieren lassen.

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$



Die Abb. illustriert die trigonometrischen Umkehrfunktionen.

## 13.3.6 Potenz- und Wurzelfunktionen

Die Eulersche<sup>70</sup> Zahl ist ähnlich der Zahl  $Pi$  ein Kuriosum – kurios, irrational, unendlich und darüber hinaus wichtig. Wie man sie herleiten kann, und warum eigentlich der natürliche Logarithmus die Eulersche Zahl als Basis hat, soll in diesem Abschnitt erklärt werden. Es beginnt mit einem beliebigen Graphen im kartesischen Koordinatensystem. Wollen wir dessen Steigung erfahren, so wissen wir, dass die Steigung des Graphen in einem beliebigen Punkte  $P$  stets der *Tangentensteigung* entspricht. Nun, a priori kennen wir diese allerdings auch nicht, also müssen wir einen zweiten Punkt  $\dot{P}$  suchen und können daraufhin die *Sekantensteigung*  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  berechnen, die bekanntlich zwischen den beiden von uns gewählten Punkten liegt.

Die Steigung der Sekante repräsentiert die durchschnittliche Steigung zwischen zwei

<sup>70</sup>Leonhard Euler, schweizer. Mathematiker, 1707 – 1783.

Punkten eines beliebigen Graphen. Bei linearen Funktionen ist die lokale Steigung immer konstant und kann daher durch die Sekantensteigung berechnet werden. Um für den allgemeinen Fall, der auch für gekrümmte Graphen gilt, von der durchschnittlichen zur lokalen Steigung zu gelangen, rücken wir unseren zweiten Punkt  $\dot{P}$  gedanklich so weit wie möglich an  $P$  heran, so dass wir jeden noch so kleinen Abstand letztendlich transzendieren:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ . Durch diesen Grenzwert erhalten wir a posteriori die Tangentensteigung als lokale Steigung im Punkte  $P$ . Wachstumsfunktionen – das sind besondere Funktionen zur Bestimmung von Wachstums- und Zerfallsprozessen. Solche Funktionen zeigen die allgemeine Form.

$$f(t) = a \cdot b^t$$

Der Anfangsbestand wird durch  $a$  repräsentiert und  $b$  steht für den Wachstumsfaktor. Mit solcherlei Funktionen könnte man u.a. sein Bankguthaben von fünf Euro bei einem unrealistisch hohen Zinssatz von 18 Prozent bis zum Jahre 2018 ausrechnen.

$$f(13) = 5 \cdot 1,18^{13} \approx 42 \text{ Euro}$$

Bei einem negativen Bankguthaben sollte man sich auch mit einem unrealistisch kleinen Zinssatz zufrieden geben. Was aber nun die Steigung solcher Funktionen betrifft, so suchen wir diese nach demselben Muster. Dazu betrachten wir wieder zwei Punkte.

$$P_1(t, ab^t) \quad P_2(t + \Delta t, ab^{t+\Delta t})$$

Nun kann die Steigung mit der allgemeinen Formel für lineare Graphen hergeleitet werden. In diese setzen wir dann unsere Punkte der Exponentialfunktion ein.

$$m = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{a \cdot b^{t+\Delta t} - a \cdot b^t}{t + \Delta t - t} = \frac{a \cdot b^t \cdot b^{\Delta t} - a \cdot b^t}{\Delta t} = \frac{a \cdot b^t (b^{\Delta t} - 1)}{\Delta t} = a \cdot b^t \left( \frac{b^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \right)$$

Folglich ist die Ableitung der Exponentialfunktion für  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  die Exponentialfunktion selber – multipliziert mit einem komplizierten Bruch! Dieser Bruch wurde als natürlicher Logarithmus zur Basis  $b$  definiert. Hmm, wäre doch verlockend, wenn man eine Basis  $b$  hätte, bei der der Bruch zu Eins wird, denn dann wäre die Ableitung gleich der originalen Funktion. Und von Euler stammt ein unendlicher Dezimalbruch, der diese Bedingung tatsächlich erfüllt. Und diese Zahl  $e = 2,71828182826\dots$  hat man zu Ehren ihres Entdeckers die Eulersche Zahl  $e$  getauft.

$$f(t) = a \cdot b^t \quad \rightarrow \quad f'(t) = a \cdot b^t \cdot \ln b$$

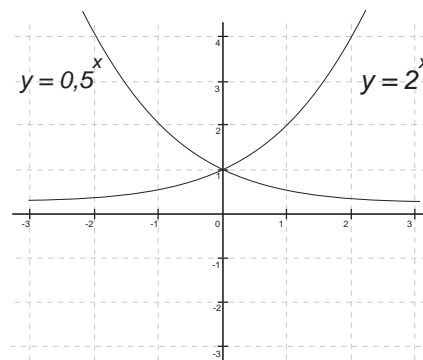
$$f(x) = a \cdot e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = a \cdot e^x \cdot \ln e = a \cdot e^x$$

### 13.3.7 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen mit konstanter Basis  $a$  und variablem Exponenten  $x$ . Dabei hängt die Steigung der Kurve von der Basis  $a$  ab.

$$y = a^x$$





Die Abb. illustriert die Abhängigkeit einer Exponentialfunktion von der Basis  $a$ .

### 13.3.8 Logarithmusfunktionen

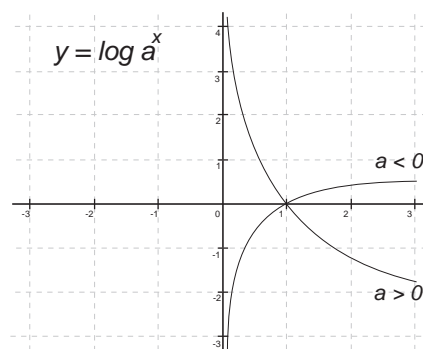
Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen. Beachten sollte man, dass Logarithmen nur für positive reelle Zahlen und einer Basis ungleich der Eins definiert sind.

$$y = \log a^x \Leftrightarrow a^y = x$$

Die wichtigsten Eigenschaften für Logarithmen sollen noch einmal unkommentiert wiederholt werden.

$$\begin{aligned} \log_a(x_1 \cdot x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \\ \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \\ \log_a x^n &= n \cdot \log_a x \\ \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a} \\ (\log_a x)' &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' \\ &= \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' \\ &= \frac{1}{x \cdot \ln a} \\ \ln x &= \log e^x \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Der *Definitionsbereich* ist nur für  $x > 0$  gültig, der *Wertebereich* der Logarithmusfunktion ist  $\mathbb{R}$ . Unabhängig von der Basis  $a$  besitzen alle Logarithmusfunktionen eine Nullstelle bei  $x_0 = 1$ . Ob die Funktion nun *streng monoton wachsend* oder *fallend* ist, hängt von der Basis  $a$  ab, d.h. ob sie größer oder kleiner Eins ist. Das zeigt die nun folgende Abbildung in aller Deutlichkeit.



Die Abb. illustriert die Abhängigkeit einer Logarithmusfunktion von der Basis  $a$ .

## 13.4 Differentialrechnung

*im Aufbau*

### 13.4.1 Ableitung einer Funktion

*im Aufbau*

### 13.4.2 Elementare Ableitungsregeln

*im Aufbau*

### 13.4.3 Relative und absolute Extrema

*im Aufbau*

### 13.4.4 Kurvendiskussion

Mit dem erhaltenen Gedankengebäude sollte es nun möglich sein, sog. *Kurvendiskussionen* durchzuführen. Gleich vorweg, der Ausdruck „Diskussion“ ist irreführend, denn diskutiert im klassischen Sinne mit Meinungen und Gegenargumenten wird keinesfalls – es werden vielmehr die wesentlichen Eigenschaften einer Funktion erfasst und verarbeitet, so dass später der Graph in Annäherung der signifikanten Punkte gezeichnet werden kann. In Zeiten von MATHEMATICA<sup>©</sup> & Co. mag das antiquiert erscheinen – wieso die Mühe machen, eine Kurve durch viel Einzelschritte zu skizzieren, wenn ein simpler Tastendruck ein viel genaueres Ergebnis liefern kann –, doch der Weg ist ja bekanntlich das Ziel.

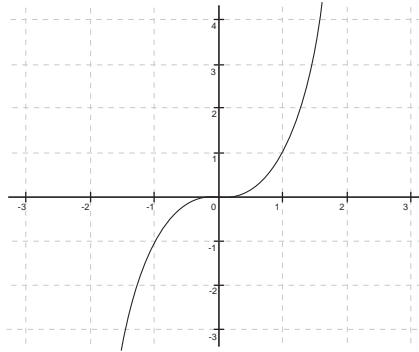
#### \* DER 9-PUNKTE PLAN ZUR ANALYSE EINER FUNKTION

Untersucht werden mehrere Eigenschaften, die in ihrer Gesamtheit ein halbwegs skizzierbares Abbild des Graphen liefern.

- Angabe des Definitions- und Wertebereichs.
- Berechnung der Nullstellen – Schnittpunkte mit der Abszisse.
- Symmetrie und Periodizität.
- Der Schnittpunkt mit der Ordinate.
- Asymptoten.
- Monotone Bereiche.
- Extrempunkte.
- Wendepunkte.
- Der Grenzwert von  $y$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

★ **Beispiel.** Eine triviale Polynomfunktion

$$y = x^3$$



Die Abb. illustriert die Funktion  $y = x^3$  und  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

Die **Definitions-** und **Wertebereiche** sind vollständig auf  $\mathbb{R}$  gegeben. Die **Nullstelle** ist auch schnell berechnet:  $x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ . Bei  $x = 0$  liegt ferner der **Schnittpunkt mit der Ordinate**:  $x = 0 \Rightarrow y = 0$ . Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung:  $f(-x) = -f(x)$ , somit **ungerade**, und sie ist **nicht periodisch**.

$$x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$x^3 < 0 \Rightarrow x < 0$$

Es existieren **keine Asymptoten**, da die Funktion sich keinem Wert annähert, sondern unendlich wächst:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$ . Um die Monotonie zu bestimmen, braucht es die erste Ableitung:  $y' = 3x^2$ . Somit folgt  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y' > 0$ . Sie ist **monoton steigend** für alle  $x \neq 0$ . Extrempunkte klassifiziert man, indem die erste Ableitung gleich null gesetzt wird. Da die erste Ableitung die lokale Steigung des Graphen verrät, sind genau die Punkte gesucht, wo die Steigung gleich null ist:

$$y' \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$y'(0^-) > 0$$

$$y'(0^+) > 0$$

Ein Extremum liegt somit bei  $x = 0$ . Da in dessen Nähe kein Steigungswechsel statt findet, handelt es sich um einen **Sattelpunkt**. Die Wendepunkte – also die Punkte, in denen sich das Krümmungsverhalten des Graphen ändert – erhält man durch die zweite Ableitung. Gesucht werden schließlich genau die Punkte, in denen die Steigung maximal ist – und das sind die Nullstellen der zweiten Ableitung.

$$y'' = 6x$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$y'' < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

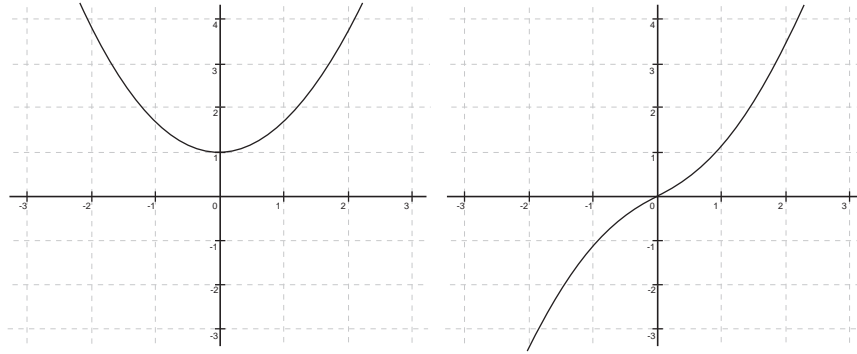
Der einzige **Wendepunkt** ist der Sattelpunkt. Für  $x > 0$  ist die Kurve konkav und für  $x < 0$  ist sie konvex.

★ **Beispiel.** Die Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

$$y_1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$y_2 = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Bei den Hyperbelfunktionen handelt es sich um zusammengesetzte  $e$ -Funktionen. Neben den genannten existieren auch noch die *Tangens-* und *Kotangens hyperbolicus* Funktionen, die sich dann, wie auch bei den trigonometrischen Funktionen, aus den Erstgenannten zusammensetzen lassen.



Die Abb. illustriert die beiden Hyperbelfunktionen  $y = \cosh x$  und  $y = \sinh x$ .

	$y = \cosh x$	$y = \sinh x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{R} \setminus (-\infty, 1)$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	–	$x_0 = 0$
Ordinatenschnittpunkt	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
Symmetrie	gerade	ungerade

Beim *Hyperbelkosinus* liegt der **Schnittpunkt mit der Ordinate** bei  $y = 1$ . Die Funktion ist ferner achsensymmetrisch, d.h. es handelt sich um eine **gerade Funktion**.

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$$

Beim *Hyperbelsinus* liegt der **Schnittpunkt** bei  $y = 0$ . Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h. es handelt sich um eine **ungerade Funktion**.

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} = -f(x)$$

Die Periodizität zu untersuchen gestaltet sich etwas aufwendiger – es wird für den Hyperbelkosinus exemplarisch gezeigt, dass die Funktion **nicht periodisch** ist. Analog würde die Untersuchung beim Hyperbelsinus laufen.

$$\begin{aligned}
 f(x+p) &= \frac{e^{x+p} + e^{-(x+p)}}{2} \\
 &= \frac{e^x \cdot e^p + e^{-x} \cdot e^{-p}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} e^p (e^x + e^{-x} \cdot e^{-p} \cdot e^{-p}) \\
 &= \frac{e^p}{2} (e^x + e^{-x} \cdot e^{-2p}) \\
 &\neq f(x)
 \end{aligned}$$

Da beide Funktionen positiv wie negativ unbegrenzt wachsen, sind **keine Asymptoten** im klassischen Sinn vorhanden<sup>71</sup>. Untersuchen wir nun die monotonen Bereiche

<sup>71</sup>Allerdings nähern sich beide Funktionen für  $x \rightarrow \infty$  der  $e$ -Funktion  $y = \frac{1}{2}e^x$  an.

des Hyperbelkosinus. Dazu brauchen wir wieder die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2}(e^x + (-1)e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow x_1 = 0 \\ x > 0 &\Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \text{monoton steigend} \\ x < 0 &\Rightarrow y' < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend} \end{aligned}$$

Es existiert ein **Minimum** bei  $x = 0$ , da dort eine negative Steigung in eine positive übergeht.

$$y'(0^-) < 0, y'(0^+) > 0 \Rightarrow \exists \text{ Minimum}$$

Beim Hyperbelsinus ist es analog, doch dieser besitzt weder Maxima noch Minima.

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2}(e^x - (-1)e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \forall x \in \mathbb{R} : y' &> 0 \Rightarrow \text{streng monoton steigend} \end{aligned}$$

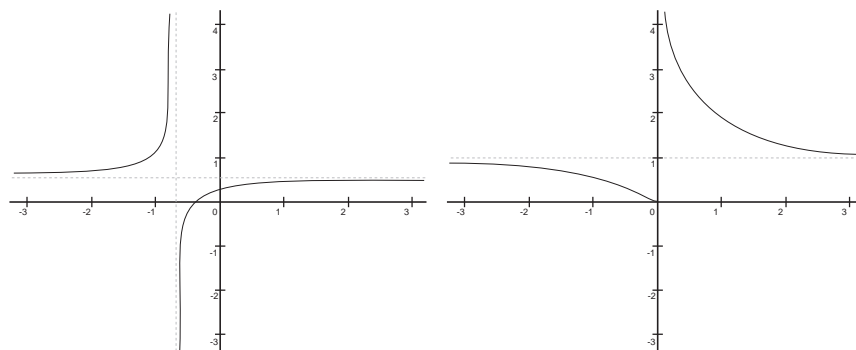
Zuletzt wären da noch die Wendepunkte, doch diese existieren beim Hyperbelkosinus nicht, da die zweite Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion ausspuckt und diese bekanntlich keine Nullstellen besitzt.

$$y'' = \left( \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

Beim Hyperbelsinus existiert ein **Wendepunkt** für  $x_0 = 0$ . Vom Krümmungsverhalten ist der gesamte Kurvenverlauf des Hyperbelkosinus konkav, beim Hyperbelsinus ist die Kurve auf dem Intervall  $(-\infty, 0)$  konvex und auf dem Intervall  $(0, \infty)$  ist sie konkav.

★ **Beispiel.** Eine Potenz- und eine rationale Funktion.

$$\begin{aligned} y &= 2^{\frac{1}{x}} \\ y &= \frac{3x+1}{5x+2} \end{aligned}$$



Die Abb. illustriert die Funktion  $y = \frac{3x+1}{5x+2}$  und  $y = 2^{\frac{1}{x}}$ .

	$y = 2^{\frac{1}{x}}$	$y = \frac{3x+1}{5x+2}$
Definitionsbereich	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$
Wertebereich	$y \in (0, \infty) \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	–	$x_0 = -\frac{1}{3}$
Ordinatenschnittpunkt	–	$x_0 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
Symmetrie	–	–

Bei beiden Funktionen sind **Asymptoten** vorhanden, die nun hergeleitet werden.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x}} = 2^0 = 1$$

Bei dieser Funktion existiert bei  $y = 1$  eine horizontale Asymptote. Der Polstelle bei  $x = 0$  nähern wir uns einmal von links und einmal von rechts..

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}} = 2^{\infty} = \infty$$

Bei der rationalen Funktion gestaltet sich die Suche der Asymptote ein wenig trickreicher.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{5x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(3 + \frac{1}{x})}{x(5 + \frac{2}{x})} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \frac{3}{5}$$

Die horizontale Asymptote liegt bei  $y = \frac{3}{5}$ . Durch das Nennerpolynom ist das Vorhandensein einer Polstelle bei  $y = -\frac{2}{5}$  bestimmt.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}} \frac{3x+1}{5x+2} = \pm\infty$$

Als nächstes soll die Monotonie untersucht werden. Dazu werden wieder die Ableitungen gebildet.

$$\left(\frac{3x+1}{5x+2}\right)' = \frac{3(5x+2) - 5(3x+1)}{(5x+2)^2} = \frac{1}{(5x+2)^2} > 0$$

Somit ist diese Funktion  $\forall x \in D$  streng monoton steigend. Bei der Potenzfunktion handelt es sich um eine Komposition zweier Funktionen, so dass zur Ableitung die Ketten- bzw. Verknüpfungsregel angewandt wird.

$$y = 2^{\frac{1}{x}} = g(f(x))$$

$$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\left(2^{\frac{1}{x}}\right)' = 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0$$

Da die ersten Faktoren  $\forall x \in D$  stets positiv, der dritte aber stets negativ ist, ist die Funktion streng monoton fallend. Wie man schon fast vermuten sollte, besitzen beide Funktionen keine Extrema.

$$\forall x : 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \neq 0 \implies x_0 \in \{\emptyset\}$$

$$\forall x : \frac{1}{(5x+2)^2} \neq 0 \implies x_0 \in \{\emptyset\}$$

Die Suche nach den Wendepunkten erfordert auf den ersten Blick eine recht unbequeme zweite Ableitung. Das soll aber nicht abschrecken, zumal es gute Gelegenheit bietet, das artgerechte Hantieren mit Kompositionen zu üben.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(5x+2)^2} & \Rightarrow & y''(x) = f'(g) \cdot g'(x) \\ f(g) &= \frac{1}{g} & \Rightarrow & f'(g) = -\frac{1}{g^2} \\ g(x) &= (5x+2)^2 & \Rightarrow & g'(x) = h'(i) \cdot i'(x) \\ h(i) &= i^2 & \Rightarrow & h'(i) = 2i \\ i(x) &= 5x+2 & \Rightarrow & i'(x) = 5 \\ y'' &= -\frac{1}{g^2} \cdot (50x+20) = -\frac{50x+20}{(5x+2)^4} \end{aligned}$$

Aus der Nullstelle des Zählerpolynoms folgt, dass sich bei  $x_1 = -\frac{2}{5}$  ein Wendepunkt befindet. Bei der Potenzfunktion ist die Wendepunktsuche ähnlich aufwendig.

$$\left( 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right)' = \ln 2 \left( 2^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right)'$$

Konstante Faktoren dürfen vor die Ableitung gezogen werden. Für den Rest greift die Produktregel.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ &= \ln 2 \cdot \left[ \left( 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) + 2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} \right] \\ &= \ln^2 2 \cdot \frac{1}{x^4} \cdot 2^{\frac{1}{x}} + \ln 2 \cdot \frac{2}{x^3} \cdot 2^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \Leftrightarrow \ln 2 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 2x \cdot 2^{\frac{1}{x}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln 2 + 2x &= 0 \\ x_1 &= -\frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Somit existiert ein Wendepunkt an der Stelle  $x_1 \approx -0,34$ . Die Kurve ist für  $x > -\frac{\ln 2}{2}$  konvex und für  $x < -\frac{\ln 2}{2}$  konkav.

## 14 Vektoranalysis

### 14.1 Parametrisierte Kurven

Betrachtet man Kurven im Raum, so stellt sich die Frage, wie sich diese mathematisch ausdrücken lassen. Mit elementaren Funktionen ist es zumindest nicht möglich – zumal die wenigsten Kurven sich als eindeutige Funktion beschreiben lassen. Daher muss ein anderes Modell greifen: Man nimmt sich ein Intervall  $\in \mathbb{R}$  und bildet dieses auf Vektoren ab, um genauer zu sein, auf Koordinaten in  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren somit folgende allgemeine Abbildung:

$$\begin{aligned}\vec{p}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \vec{p}(t)\end{aligned}$$

Für mögliche Anwendungen beschränkt man sich natürlich auf den zwei- oder dreidimensionalen Raum. Man betrachtet also nicht Punkte auf der  $x$ -Achse und deren eindeutig festgelegte Funktionswerte  $y$ , sondern sieht die Kurve im Raum, die übrigens *stetig* sein muss, als eine Strecke mit Start- und Endpunkt, die in Abhängigkeit der Zeit  $t$  quasi einen „Meilenstein“, das ist die Abbildung vom Intervall in den Raum, verpasst bekommt. Betrachten wir als einführendes Beispiel den Einheitskreis.

$$\begin{aligned}\vec{p}: [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es lässt sich die Abbildung so modifizieren, dass man eine Beschleunigung erhält, d.h. die „Meilensteine“ auf der Kurve werden zuerst nah beieinander und mit fortschreitendem  $t$  immer weiter voneinander entfernt gesetzt.

$$\begin{aligned}\vec{p}: [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2\pi}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{2\pi}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

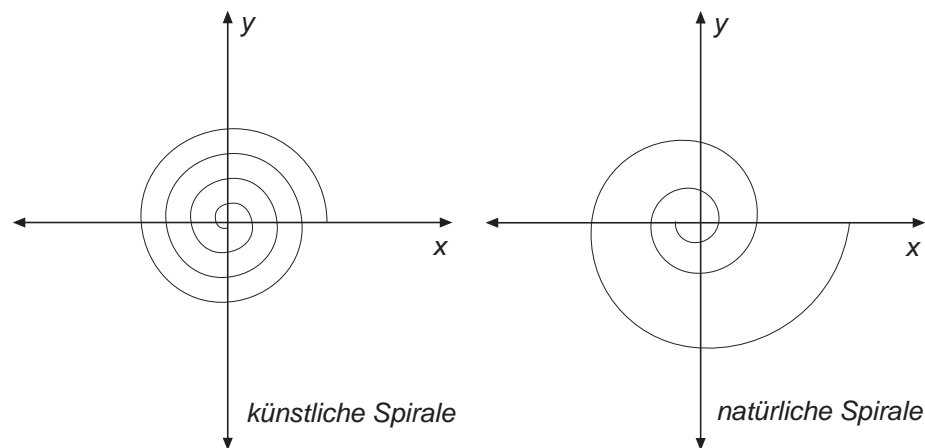
Eine weitere Möglichkeit ist die Bildung einer Spirale im Raum, wobei es sich nicht um eine natürliche, sondern um eine künstliche mit konstantem Abstand handelt. Das zugrundeliegende Intervall ist hier unbeschränkt, da auch die Spirale theoretisch unendlich lang ist.

$$\begin{aligned}\vec{p}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2\pi} \cdot \cos t \\ \frac{t}{2\pi} \cdot \sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Spiralen, die in der Natur vorkommen, z.B. bei Schnecken, weisen eine andere Form auf. Bei diesen logarithmische Spiralen wächst der Abstand zwischen den Umrundungen auf der  $x$ -Achse.

$$\begin{aligned}\vec{p}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos t \\ e^t \cdot \sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

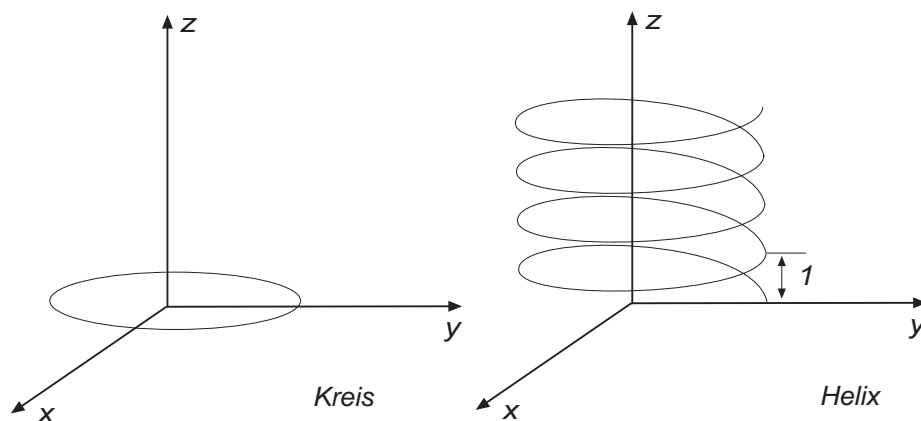




Die Abb. zeigt die künstliche und natürliche Spiralen in der Ebene.

Gehen wir nun in den dreidimensionalen Raum über und wenden dieselbe Art von Abbildung an, um eine Schraubenlinie – eine sog. *Helix* – zu konstruieren. Dabei lassen wir die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten unverändert und bauen nur irgendwie die Höhe in die  $z$ -Koordinate mit ein. In diesem Beispiel soll eine Umrundung der Höhe Eins entsprechen.

$$\begin{aligned} \vec{p}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{t}{2\pi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Die Abb. zeigt den Kreis und die daraus modifizierte Helix im Raum.

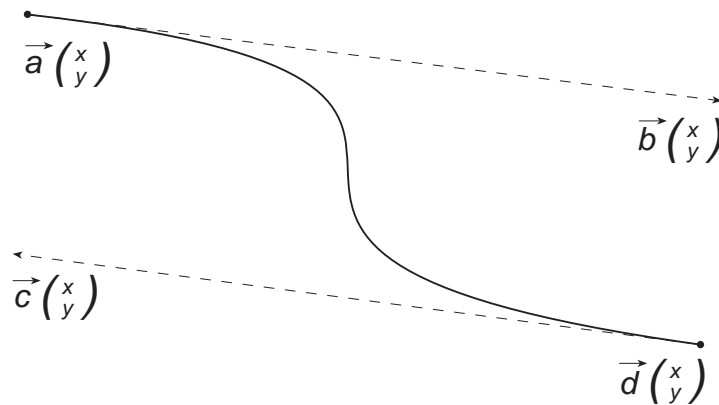
## 14.2 Bézier-Kurven

Bézier-Kurven sind typische Freiformkurven, die aus vielerlei Vektorprogrammen zu finden sind. Es handelt sich um Umriss aus einzelnen Segmenten mit glatter Verbindung – die sich aber auch per gebrochener Tangente mit spitzen Kanten realisieren lassen. Auch Fonts, also Schriftzeichen, werden durch solche Kurven intern berechnet.

Wie sieht sowas aber mathematisch aus?

$$\begin{aligned} \vec{p}: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{a} (1-t)^3 \\ &\quad + 3 \vec{b} (1-t)^2 t \\ &\quad + 3 \vec{c} (1-t) t^2 \\ &\quad + \vec{d} t^3 \end{aligned}$$

Die Kurve wird somit durch die Lage von vier Vektoren bestimmt. Das ist einmal der Startpunkt  $\vec{a}$ , der Endpunkt  $\vec{b}$  und die beiden Modifikationsvektoren  $\vec{c}, \vec{d}$ . Wie genau der Einfluss beschaffen ist, soll gleich untersucht werden. Zuerst stellen wir aber die binominale Ähnlichkeit,  $((1-t)+t)^3$ , der Abbildung fest. Sind alle vier Vektoren identisch, dann ist die Kurve natürlich nur noch ein Punkt.

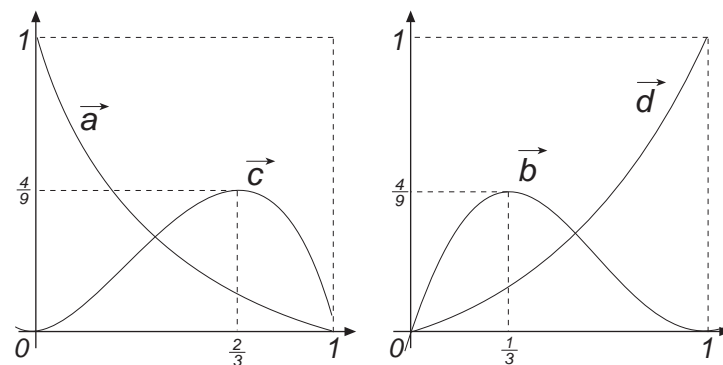


Die Abb. zeigt eine typische Bézier-Kurve.

Das Intervall wählt man i.d.R. zwischen 0 und 1, so dass wir nun in Abhängigkeit von  $t$  die einzelnen Funktionen für die Vektoren betrachten. Der Startvektor der Kurve  $a$  hat für  $t = 0$  den maximalen Einfluss, was auch einleuchten ist. Umgekehrt verhält es sich mit dem Endvektor  $d$ , der für  $t = 1$  den maximalen Einfluss auf die Kurve ausübt. Betrachten wir nun exemplarisch den Modifikationsvektor  $b$  und suchen deren Extrema.

$$\begin{aligned} f(t) &= 3(1-t)^2 t \\ f'(t) &= 3 \cdot 2(1-t)(-1)t + 3(1-t)^2 \cdot 1 \\ 0 &\stackrel{!}{=} 9t^2 - 12t + 3 \\ &\Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 \\ t &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}} \\ t &= 1 \vee \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Das lokale Minimum liegt bei  $f(t = 1)$  und das lokale Maximum, was für den Einfluss auf die Kurve gesucht wurde, liegt bei  $f(t = \frac{1}{3})$ . Daraus kann gefolgert werden, dass der Modifikationsvektor nach einem Drittel des Intervalls einen maximalen Einfluss von  $\frac{9}{4} = 44\%$  auf die Kurve ausübt. Analog verläuft die Berechnung des anderen Modifikationsvektors.



Die Abb. zeigt den Einfluss der vier Vektoren auf die Bézier-Kurve.

### 14.2.1 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren

Da die Strecke parametrisierter Kurven in Abhängigkeit der Zeit  $t$  von einem Intervall in den Raum projiziert wird, lässt sich auch die Geschwindigkeit bestimmen. Allgemein definieren wir  $h$  als eine beliebige Zeitspanne und die zurückgelegte Strecke zwischen zwei Punkten  $\vec{p}(t)$  und  $\vec{p}(t+h)$  nähern wir durch  $|\vec{p}(t+h) - \vec{p}(t)|$  an – wobei die Annäherung nur bei recht kleinen Streckenabschnitten sinnvoll ist. Da die Geschwindigkeit allgemein als die zurückgelegte Strecke pro Zeiteinheit definiert ist, gilt für die Momentangeschwindigkeit auf unserer Vektorkurve.

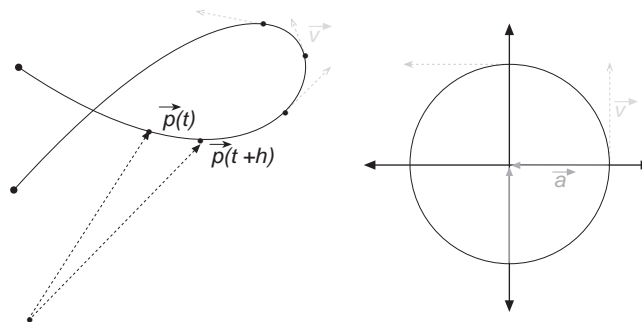
$$\lim_{h \rightarrow 0} : \frac{|\vec{p}(t+h) - \vec{p}(t)|}{h}$$

Geschwindigkeitsvektoren sind stets tangential zur Kurve, sofern sie nicht gerade den Nullvektor stellen. Da die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit ist, können nun, mit den bekannten Bezeichnungen der Physik  $v$  und  $a$ <sup>72</sup>, die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren definiert werden.

$$\vec{v} = \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{p}}{dt^2}$$

In der folgenden Abbildung sind noch einmal die Geschwindigkeitsvektoren, die tangential zur Kurve verlaufen, eingezeichnet. Ebenso lassen sich beim Einheitskreis die Beschleunigungsvektoren einzeichnen, die immer – wie die Zentripetalkraft – in den Mittelpunkt zeigen.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$



Die Abb. zeigt Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren.

<sup>72</sup>Das  $v$  steht für *velocity* und das  $a$  für *acceleration*.

Bevor das Problem der Bestimmung der Kurvenlänge behandelt wird, soll der Zusammenhang noch einmal an einem bekannten Beispiel exerziert werden. Dazu nehmen wir einfach die Normalparabel und stellen diese als parametrisierte Kurve dar. Als Startpunkt  $t$  wählen wir sinnigerweise  $t = 0$ , so dass die Kurve im Ursprung startet und mit fortschreitenden  $t$  – oder auch mit negativen  $t$  quasi rückwärts in die Vergangenheit – den Weg der Normalparabel beschreitet. Die passende Abbildung ist nicht schwer zu finden.

$$\begin{aligned}\vec{p}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das ist die einfachste, aber noch lange nicht die einzige Möglichkeit. Die Geschwindigkeit lässt sich beliebig modifizieren, so dass die Kurve z.B. mit halber oder doppelter Geschwindigkeit erzeugt wird. Kurios wird es auch, wenn man die Abbildung so verändert, dass im Ursprung plötzlich „gestoppt“ wird.

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \left(\frac{t}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} 2t \\ 4t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}$$

Warum wird gestoppt? Nun, betrachten wir die jeweiligen Ableitungen, also die Geschwindigkeitsvektoren, so stellen wir bei den ersten zwei Varianten fest, dass die Vektoren in  $x$ -Richtung konstant sind – die  $y$ -Komponente wächst aber quadratisch, so dass insgesamt die Geschwindigkeit ebenso wächst. Bei der letzten Variante wächst aber auch die  $x$ -Komponente quadratisch, so dass im Ursprung der Geschwindigkeitsvektor der Nullvektor ist.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8t \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t^5 \end{pmatrix}$$

### 14.2.2 Kurvenlänge

## 15 Kombinatorik

### 15.1 Grundbegriffe der Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit den Gesetzen der Anordnung und der Abzählbarkeit von Elementen einer endlichen Menge. Sie liefert ferner ein wichtiges Fundament, um sich später mit der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* eingehend zu befassen. Durch die Kombinatorik lässt sich beispielsweise berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, um aus einem Beutel von fünfzig verschiedenen bunten Pillen nacheinander fünf Stück zu schlucken. Die Kombinatorik kann aber noch viel mehr – soviel ist sicher.

#### \* FAKULTÄT

Die *Fakultät* ordnet jeder natürlichen Zahl  $n$  das Produkt der ersten  $n$  Zahlen zu. Sie ist somit eine Abbildung in der Menge der natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \end{array}$$

Notiert wird die Fakultät einer natürlichen Zahl mit einem Ausrufezeichen.

$$n! := \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Man beachte, dass  $0!$  als 1 definiert wird<sup>73</sup>. Weiterhin lässt sich  $n!$  äquivalent umformen.

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad \text{für } n \geq 1$$

Dies ergibt Sinn, besonders wenn man es sich an einem Beispiel veranschaulicht.

$$\begin{aligned} 6! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 &= 720 \\ &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 6 &= 720 \\ &= (6-1)! \cdot 6 &= 720 \\ &= 5! \cdot 6 &= 720 \end{aligned}$$

Bedeutungsvoll für die Kombinatorik ist die Tatsache, dass die Fakultät von  $n$  die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer  $n$ -elementigen Menge liefert. Eine 2-elementige Menge lässt sich beispielsweise auf  $2! = 2$  verschiedene Arten anordnen.<sup>74</sup>

#### \* BINOMIALKOEFFIZIENTEN $\binom{n}{k}$

Die Binominalkoeffizienten, die man „n über k“ ausspricht, liefern die Anzahl an Möglichkeiten, wie  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge angeordnet werden können – ohne das Element nach der Auswahl wieder zurückzulegen und ohne auf die Reihenfolge der Anordnung zu achten. Man stelle sich bildlich einen großen Topf mit 255 verschiedenen Farbkugeln vor, aus dem genau sechs Kugeln in sechs freie Löcher gestopft werden sollen: Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, um sechs aus 255 Farbkugeln in den freien Löchern anzuordnen? Betrachten wir dazu erst die 255 Kugeln im Topf. Nach obiger Definition können diese auf  $255!$  verschiedenen Arten angeordnet werden – eine riesige Zahl mit ca. 500 Ziffern. Nehmen wir nun an, im Topf wären nicht 255 verschiedene, sondern 250 identische und nur fünf verschiedene Kugeln.

<sup>73</sup>Die Bedeutung dieser anscheinend willkürlichen Festlegung wird später noch deutlich werden.

<sup>74</sup>Laut Mengendefinition ändert sich die Menge bei verschiedenen Anordnungen natürlich *nicht*.

Dann würden, da ja der Reihenfolge keine Beachtung geschenkt wird, die identischen Farbkugeln *untereinander* keinen Einfluss auf die Anzahl der möglichen Anordnungen haben. Es wäre völlig egal, ob man zwei Kugeln gleicher Farbe  $X$ , die natürlich nebeneinander liegen müssen, vertauschen würde oder nicht. Für die Anzahl der möglichen Anordnungen<sup>75</sup> bedeutet das in diesem Fall nicht  $255!$ , sondern statt dessen:

$$\mathbf{P}(n) = \frac{255!}{250!} = 8637487551$$

Injizieren wir diesen Gedankengang auf die 255 *unterschiedlichen* Kugeln, so werden hier  $k = 6$  Kugeln aus  $n = 255$  Kugeln gezogen. Betrachten wir isoliert die beiden Mengen und unterscheiden nicht mehr zwischen deren Farbe, sondern betrachten sie kurzfristig als eine Einheit, dann gibt es bei den *herausgenommenen* Kugeln insgesamt  $k!$  mögliche Anordnungen – bei den im Topf *übrig gebliebenen* sind es  $(n - k)!$  Möglichkeiten. Jetzt geschieht dasselbe wie bei den identischen Farbkugeln, denn wir dividieren  $255!$  durch die zwei identischen Mengen und definieren somit die Binominalkoeffizienten als die Anzahl der Möglichkeiten, um  $k$  Elemente aus einer Menge von  $n$  voneinander verschiedenen Elementen auszuwählen – auch *Kombinationen* genannt.

$$\mathbf{C}(n) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} := \binom{n}{k}$$

Eine *alternative* Form der Formel, die bei der Berechnung Vorteile liefert, lässt im Nenner das Produkt der ersten  $k$  natürlichen Zahlen stehen – also  $k!$  –, wobei die Zahl  $n$  den ersten Faktor im Zähler bestimmt und bis zum  $k$ -ten Faktor  $(n - k + 1)$  geht.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - k + 2)(n - k + 1)}{k!}$$

Man erlangt die uns *bekannte* Form, indem man den Bruch mit  $(n - k)!$  erweitert.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} \cdot \frac{(n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Das Produkt im Zähler ist vielleicht nicht sofort einsichtig, aber wenn man genau hinsieht, erkennt man, dass sich die Produkte  $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$  mit  $(n - k)!$  zu  $n!$  ergänzen: Wir haben nicht alle  $n$  Zahlen, sondern nur jene von  $n$  bis  $(n - k + 1)$ . Wäre  $n = 5$  und  $k = 3$ , so hätten wir das Produkt  $5 \cdot 4 \cdot 3$ , welches daraufhin mit  $(5 - 3)! = 2! = 1 \cdot 2$  multipliziert wird – und das ist nichts anderes als  $n!$

⊗ **Korollar.**

Die Anwendung der Formel macht nur Sinn, wenn  $n > k$  ist, ansonsten kann man sich die Mühe des Ausrechnens auch getrost sparen.

$$\begin{array}{lll} i. & \binom{n}{k} & = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n > k \\ ii. & \binom{n}{k} & = 1 \quad \text{für } n = k \\ iii. & \binom{n}{k} & = 0 \quad \text{für } n < k \end{array}$$

<sup>75</sup>Vertauschungen werden später *Permutationen* genannt, daher die Notation  $\mathbf{P}(n)$ .



Genau hier findet aber auch der binomische Lehrsatz seine Anwendung, denn es gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot a b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n$$

Und weil wir von Natur aus faul sind, können wir den binomischen Lehrsatz auch in verkürzter Form aufschreiben – mit freundlicher Unterstützung der Summennotation.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

✱ **Lemma.**

Ein paar Eigenschaften von Binominalkoeffizienten, die man tw. auch schnell nachprüfen kann. Eigenschaften iii. und iv. werden bewiesen.

- i.  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- ii.  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- iii.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- iv.  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

✱ **Beweis.** von Eigenschaft iii.

Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Formel für Binominalkoeffizienten. Anschaulich kann man es sich auch über die Symmetrie der Koeffizienten herleiten.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

□

✱ **Beweis.** von Eigenschaft iv.

Es sollen ohne auf die Reihenfolge zu achten  $k+1$  Objekte aus  $n+1$  verschiedenen Objekten ausgewählt werden. Dazu wird eines der  $n$  Objekte markiert. Mit diesem existieren  $n$  über  $k$  Möglichkeiten, ohne es  $n$  über  $k+1$ .

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}$$

Die beiden Brüche werden so erweitert, dass man sie danach zusammenfassen kann. Der erste mit  $(k+1)$  und der zweite mit  $(n-k)$ .

$$\frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

Nun können wir also alles unter einen Bruchstrich schreiben, die  $n!$  im Zähler ausklammern und unsere Aussage beweisen.

$$\frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

□



## 15.2 Permutationen, Kombinationen und Variationen

Jetzt werden die Grundlagen geschliffen und poliert. Begonnen wird mit der *Permutation*<sup>77</sup> von Elementen einer Menge. Dabei handelt es sich um die möglichen Anordnungen der Elemente untereinander. Betrachten wir dazu eine Menge mit vier Elementen.

$$M = \{a, b, c, d\}$$

Die Anzahl an Vertauschungen lässt sich, was bereits erwähnt wurde, mit der Fakultät ausrechnen. Bei diesem Beispiel existieren  $4! = 24$  Permutationen.

$$\mathbf{P}(M) = \left\{ \begin{array}{cccc} \{a, b, c, d\} & , & \{b, a, c, d\} & , & \{c, a, b, d\} & , & \{d, a, c, b\} \\ \{a, b, d, c\} & , & \{b, a, d, c\} & , & \{c, a, d, b\} & , & \{d, a, b, c\} \\ \{a, c, b, d\} & , & \{b, c, a, d\} & , & \{c, b, a, d\} & , & \{d, b, a, c\} \\ \{a, c, d, b\} & , & \{b, c, d, a\} & , & \{c, b, d, a\} & , & \{d, b, c, a\} \\ \{a, d, b, c\} & , & \{b, d, c, a\} & , & \{c, d, a, b\} & , & \{d, c, a, b\} \\ \{a, d, c, b\} & , & \{b, d, a, c\} & , & \{c, d, b, a\} & , & \{d, c, b, a\} \end{array} \right\} = 24$$

Die Sache mit der Fakultät kann man sich auch bildlich vorstellen: Für die erste der vier Stellen gibt es maximal vier Möglichkeiten der Anordnung, an der zweiten Stelle – da ein Element nun fehlt – sind es noch drei, an der dritten dann zwei und das letzte Element kann nur auf eine einzige Art angeordnet werden. Somit bestehen insgesamt  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  Möglichkeiten der Anordnung.

### \* PERMUTATIONEN BEI MULTIMENGEN

Bei der Herleitung zu den Binominalkoeffizienten wurde peripher schon auf die Existenz sog. *Multimengen*<sup>78</sup> hingewiesen – das sind Mengen, deren Teilmengen identische Elemente enthalten dürfen. Der Definition nach tragen Mengen zwar stets *wohlunterschiedene* Objekte – in der Mathematik sind Multimengen auch eher verpönt –, doch in der Informatik ist der Einsatz solcher Mengen verbreitet. Betrachten wir zur Illustration eine Menge, die sich durch mehrere identische Teilmengen auszeichnet.

$$M = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$$

Man differenziert nun zwischen Elementen und *Gruppen* – das sind Teilmengen mit identischen Elementen – und teilt die Gesamtpermutation durch die einzelnen Permutationen der Gruppen. Für das Beispiel würde damit gelten:

$$\mathbf{P}(M) = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$$

Eine Multimenge besteht im Allgemeinen aus  $n$  Elementen mit  $k$  Gruppen.

$$M = \{\underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}_{n_1}, \underbrace{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n}_{n_2}, \dots, \underbrace{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n}_{n_k}\}$$

Für die Anzahl an Permutationen bei Multimengen ist die folgende Formel gültig.

$$\mathbf{P}(M) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

<sup>77</sup>Der Begriff stammt aus dem Lateinischen: *permutare* - vertauschen.

<sup>78</sup>Multimengen werden mitunter auch als „Bags“ bezeichnet.

## \* KOMBINATIONEN

*Kombinationen* sind eigentlich nichts neues, denn sie liefern die Anzahl an Möglichkeiten, um  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge „herauszuziehen“ – Binominalkoeffizienten lassen grüßen –, doch jetzt wird differenziert zwischen Wiederholungen, d.h. dem Zurücklegen eines Elements nach der Ziehung, und keinen Wiederholungen, d.h. die Elemente stehen nach der Ziehung für weitere Aktionen nicht mehr zur Verfügung.

$$\mathbf{C}(M) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Gut, das ist bekannt. Wenn allerdings jedes Element nach der Ziehung wieder zurück in die Menge wandert, dann kann es folglich auch mehrmals gezogen werden. Kontrastieren wir diesen Zusammenhang an der folgenden Menge:

$$M = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$$

Es sollen zwei von vier Elementen gezogen werden – Reihenfolge ist dabei egal.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(M) &= \left\{ \begin{array}{ccc} \{\clubsuit, \diamond\} & , & \{\clubsuit, \heartsuit\} & , & \{\clubsuit, \spadesuit\} \\ \{\diamond, \heartsuit\} & , & \{\diamond, \spadesuit\} & , & \{\heartsuit, \spadesuit\} \end{array} \right\} = 6 \\ \mathbf{C}_w(M) &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \{\clubsuit, \clubsuit\} & , & \{\clubsuit, \diamond\} & , & \{\clubsuit, \heartsuit\} & , & \{\clubsuit, \spadesuit\} & , & \{\diamond, \diamond\} \\ \{\diamond, \heartsuit\} & , & \{\diamond, \spadesuit\} & , & \{\heartsuit, \heartsuit\} & , & \{\heartsuit, \spadesuit\} & , & \{\spadesuit, \spadesuit\} \end{array} \right\} = 10 \end{aligned}$$

Allgemein berechnet man Kombinationen „mit Zurücklegen“ mit der folgenden Formel.

$$\mathbf{C}_w(M) = \binom{n}{k} + n = \binom{n+k-1}{k}$$

## \* VARIATIONEN

Mit der *Variation*<sup>79</sup> wird der Kombinationsbegriff gelockert, denn nun wird streng auf die *Reihenfolge* beachtet, d.h. es werden auch mehrere Anordnungen zugelassen. Illustrieren wir dies mit einem zechenden Zahlmeister, der zufälligerweise die Zusammensetzung der zwölf Ziffern des Zentraltresors vergisst. Hier macht es wenig Sinn, wenn er die möglichen Ziffern zwar kennt, sie jedoch in beliebiger Reihenfolge eingibt. Da die Reihenfolge nun von Belang ist, gibt es zu *jeder* Kombination – also die  $k$  gezogenen Elemente einer Menge – auch  $k$  Permutationen. Ohne Zurücklegen gilt dann:

$$\mathbf{V}(M) = k! \cdot \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ganz einfach wird die Geschichte, wenn wir auch das Zurücklegen eines Elements erlauben. Nehmen wir wieder das verlockende Bild des Tresors, dann haben wir inklusive der Null einen Ziffernvorrat von zehn Ziffern zur Verfügung – das sind die  $n$  Elemente der Menge. Die Kombination besteht aus  $k = 4$  Ziffern, die die Kiste öffnen sollen. Da das Schloss aber kaputt ist, wird jede x-beliebige Eingabe den Schrank öffnen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann insgesamt? Nun, für jede der  $k$  Ziffern besteht ein Vorrat aus  $n$  Ziffern, also gibt es insgesamt 10000 Möglichkeiten – oder allgemein:

$$\mathbf{V}_w(M) = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$$

<sup>79</sup>Der Begriff stammt aus dem Lateinischen: *variieren* - abändern

### 15.3 Stichproben einer n-elementigen Grundgesamtheit

Das theoretische Fundament ist vorhanden und soll noch einmal mit Kombinationen, Variationen & Co. aufgearbeitet werden. Wir stellen uns dazu den klassischen Fall einer großen Urne vor, in der keine Rauschmittel versteckt werden, sondern nur wohlunterschiedene Zahlenkugeln der Anzahl  $n$ . Daraufhin werden Stichproben vom Umfang  $k$  getätigt und es wird analysiert, wie viele Möglichkeiten unter bestimmten Bedingungen möglich sind. Dazu kreieren wir eine Urne mit fünf Zahlenkugeln, aus der jeweils genau zwei Stück gezogen werden sollen.

$$M = \{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}\}$$

#### \* GEORDNETE STICHPROBE MIT ZURÜCKLEGEN

Hier geht es um **Variationen** mit möglichen Wiederholungen.

$$\mathbf{V}_w(M) = \left\{ \begin{array}{ccccc} \{\textcircled{1}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{2}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{3}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{4}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{4}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{4}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{4}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{4}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{5}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{5}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{5}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{5}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{5}, \textcircled{5}\} \end{array} \right\} = 25$$

$$\mathbf{V}_w(M) = n^k = 5^2 = 25$$

#### \* GEORDNETE STICHPROBE OHNE ZURÜCKLEGEN

Hier geht es um **Variationen** ohne mögliche Wiederholungen. Sinnigerweise fallen alle doppelten Anordnungen weg, da man schlecht das gleiche Element ein zweites Mal ziehen kann, wenn es sich ja gar nicht mehr im Pott befindet.

$$\mathbf{V}(M) = \left\{ \begin{array}{ccccc} & \{\textcircled{1}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{2}, \textcircled{1}\} & , & & \{\textcircled{2}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{3}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{2}\} & , & & \{\textcircled{3}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{4}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{4}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{4}, \textcircled{3}\} & , & & \{\textcircled{4}, \textcircled{5}\} \\ \{\textcircled{5}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{5}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{5}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{5}, \textcircled{4}\} & \end{array} \right\} = 20$$

$$\mathbf{V}(M) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{3!} = 20$$

#### \* UNGEORDNETE STICHPROBE MIT ZURÜCKLEGEN

Hier geht es um **Kombinationen** mit möglichen Wiederholungen.

$$\mathbf{C}_w(M) = \left\{ \begin{array}{ccccc} \{\textcircled{1}, \textcircled{1}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{5}\} \\ & & \{\textcircled{2}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{5}\} \\ & & & & \{\textcircled{3}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{5}\} \\ & & & & & & \{\textcircled{4}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{4}, \textcircled{5}\} \\ & & & & & & & & \{\textcircled{5}, \textcircled{5}\} \end{array} \right\} = 15$$

$$\mathbf{C}_w(M) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6}{2} = 15$$

## \* UNGEORDNETE STICHPROBE OHNE ZURÜCKLEGEN

Hier geht es um **Kombinationen** ohne mögliche Wiederholungen.

$$C(M) = \left\{ \begin{array}{cccc} \{\textcircled{1}, \textcircled{2}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{1}, \textcircled{5}\} \\ & & \{\textcircled{2}, \textcircled{3}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{2}, \textcircled{5}\} \\ & & & & \{\textcircled{3}, \textcircled{4}\} & , & \{\textcircled{3}, \textcircled{5}\} \\ & & & & & & \{\textcircled{4}, \textcircled{5}\} \end{array} \right\} = 10$$

$$C(M) = \binom{n}{k} = \binom{5}{2} = 10$$

## ★ Beispiel. „Kombinationen unter Kickern ...“

Der Fußball-Trainer des „1.FC Kreuztritt“ freut sich gar nicht über die neue Regelung für Nicht-EU-Ausländer. Demnach dürfen bei jeder Mannschaftsaufstellung maximal drei Nicht-EU-Ausländer eingesetzt werden. Der Kader des 1.FC Kreuztritt besteht aus 13 Deutschen – alles Spezialisten für luschige Lupfer –, 9 EU-Ausländern und 8 Nicht-EU-Ausländern. Ungeachtet der neuen Regelung für Ausländer fragt sich der verärgerte Trainer, wie viele Möglichkeiten es generell gibt, um eine 11-köpfige Mannschaft aufzustellen? Da bei Spielern die Reihenfolge irrelevant ist und ein Spieler in den seltensten Fällen mehrmals aufgestellt werden kann, handelt es sich natürlich um eine Kombination ohne Wiederholungen.

$$\binom{30}{11} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{11!} = 54627300$$

Nun will der Trainer wissen, wie viele Möglichkeiten einer 11-köpfigen Mannschaftsaufstellung es gibt, bei der *genau* drei Nicht-EU-Ausländer mitspielen? Dazu betrachtet sein Berater zuerst isoliert die Möglichkeiten für die drei Nicht-EU-Ausländer:

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

Für die restlichen 8 Spieler bleibt nur noch die vereinigte Menge der deutschen Spieler mit den EU-Ausländern übrig, so dass für die Gesamtheit an Möglichkeiten gilt:

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{21}{8} = 17093160$$

Völlig verblüfft will der Trainer jetzt noch wissen, wie viele Möglichkeiten einer 11-köpfigen Mannschaftsaufstellung es gibt, bei der *höchstens* drei Nicht-EU-Ausländer mitspielen? Das ist etwas komplizierter, doch sein besonnener Berater kennt auch hier die passende Antwort: Die Möglichkeiten setzen sich zusammen aus den Möglichkeiten für *genau* 0, 1, 2 und 3 Nicht-EU-Ausländer in der Mannschaft. Wichtig ist die Tatsache, dass es bei den Kombinationen keine Überschneidungen gibt und die einzelnen Möglichkeiten somit bequem addiert werden können.

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{21}{8} + \binom{9}{2} \cdot \binom{21}{9} + \binom{9}{1} \cdot \binom{21}{10} + \binom{9}{0} \cdot \binom{21}{11} = 31201800$$

Mit solch kleinen Zahlen kann ein echter Trainer natürlich nicht viel anfangen, will daher zum Schluss noch wissen, auf wie viele Arten er seinen kompletten Kader nebeneinander aufstellen und anpfeifen kann.

$$30! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30 = 265252859812191058636308480000000$$

... Abpfiff!

## 16 Stochastik

Die Stochastik beschäftigt sich mit der Verteilung von Wahrscheinlichkeiten bei bestimmten Ereignissen. Als Einführung werden die wichtigsten Grundbegriffe erläutert, danach wird über die besondere *Laplacesche Wahrscheinlichkeit* der Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch nach *Kolmogorow*<sup>80</sup> eingeführt.

### 16.1 Laplacescher Ereignisraum

Der Schlüsselbegriff, der im Folgenden eine zentrale Rolle spielt, ist der „Zufallsversuch“. Damit sind solche Versuche gemeint, deren Ausgänge nicht exakt vorhersehbar sind. Beim klassischen Versuch des Münzwurfs gibt es im Modellfall<sup>81</sup> immer nur zwei Möglichkeiten, doch ob als Ergebnis „Kopf“ oder „Zahl“ geworfen wird, das kann keine aktuelle Formel vorhersagen. Definieren wir nun einige formale Begriffe, mit denen hier viel hantiert werden wird.

- Bei einem Zufallsversuch werden die möglichen, sich aber gegenseitig ausschließenden *einzelnen* Ereignisse als *Elementarereignisse*  $\mathbf{e}$  bezeichnet.
- Die Menge aller Elementarereignisse nennt sich treffenderweise einfach die *Ereignismenge*  $\mathbf{E}$ .
- Als *Ereignis*  $\mathbf{A}$  bezeichnen wir im Folgenden formal eine beliebige Teilmenge der Ereignismenge  $\mathbf{E}$  – Elementarereignisse sind somit natürlich auch Ereignisse.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &:= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \\ \mathbf{A} &:= \{\mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_k\}\end{aligned}$$

★ **Beispiel.** *Einmal einen Würfel werfen als Zufallsversuch.*

Wir betrachten einen stinknormalen Würfel aus einem Glücksspiel. Die Ereignismenge ist demzufolge nach  $\mathbf{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Jetzt wird der Würfel geworfen und ein Ereignis  $\mathbf{A}$  wird erwartet. Mögliche Vertreter für Ereignisse wären:

■	_____	■
$\{1\}$	.....	„Die Eins als Elementarereignis“
$\{1, 3, 5\}$	.....	„A sei ungerade Zahl“
$\{1, 6\} = \overline{\{2, 3, 4, 5\}}$	.....	„Es gilt: $\neg(A > 1 \wedge A < 6)$ “
$\{1, 3, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{5\}$	.....	„A sei ungerade $\wedge A > 3$ “
$\{1, 3, 5\} \cup \{4, 5, 6\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$	.....	„A sei ungerade $\vee A > 3$ “
$\{\emptyset\}$	.....	„unmögliches Ereignis“
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	.....	„sicheres Ereignis“
■	_____	■

Die leere Menge „ $\emptyset$ “ als „unmögliches Ereignis“ gehört natürlich ebenso zu den Ereignissen, wie auch das „sichere Ereignis“ – die Vereinigung aller Elementarereignisse. Wie sich schon erahnen lässt, gibt es insgesamt  $2^n$  mögliche *Ereignisse*, das ist nichts anderes als die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ , welche als *Ereignisraum* bezeichnet wird.

<sup>80</sup> *Andrej Kolmogorow*, sowjet. Mathematiker, 1903-1987

<sup>81</sup> Wir betrachten nur Modellfälle und lassen abwegige Kausalitäten à la „Münze landet im Gully“ weg.

### ⌘ MESSWERTE ALS ZUFALLSVERSUCH

Neben Versuchen, wo die Elementarereignisse einen endlichen Wert haben, lassen sich bei Messungen auch Intervalle als Ereignis definieren. Will ich beispielsweise messen, mit welcher Häufigkeit an Sommertagen eine bestimmte Temperatur an einem bestimmten Ort herrscht, dann habe ich als Ereignismenge die Menge  $\mathbb{R}$  – streng genommen nur einen winzigen Ausschnitt, da die Menge aller möglichen Temperaturen auf der Erde eine wirklich *sehr* kleine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Mögliche Intervalle mit Elementarereignissen irgendwelcher Messungen wären beispielsweise:

$$\mathbf{E} = [2, 85 ; 2, 9]$$

$$\mathbf{E} = (42, \infty)$$

### ⌘ WAHRSCHEINLICHKEIT

Die Wahrscheinlichkeit<sup>82</sup> eines Ereignisses kann als Funktion betrachtet werden, die einem Ereignis einen positiven Zahlenwert zuweist.

$$\begin{aligned} P : \text{Menge der Ereignisse} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \mathbf{A} &\longmapsto P(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Es wird genau unterschieden zwischen **relativer** und **absoluter Häufigkeit**. Die absolute Häufigkeit ist klar, sie gibt bei  $n$  Versuchen die Häufigkeit  $h$  an, mit der ein Ereignis  $\mathbf{A}$  eintritt. Die relative Häufigkeit hingegen steht im Verhältnis zur absoluten Häufigkeit – sie wird berechnet, indem die absolute Häufigkeit durch die Anzahl der Versuche  $n$  geteilt wird. Die zugrunde liegende Idee ist, dass es einen Grenzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gibt, da bei einer wachsenden Anzahl an Versuchen die relative Häufigkeit sich immer mehr einem gewissen Wert annähert.

$$P(\mathbf{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{h(\mathbf{A})}$$

Man spricht von *Laplaceschen Zufallsversuchen*, wenn alle Elementarereignisse stets dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen<sup>83</sup>. Solche Versuche bilden aber nicht die Regel, darum wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit nun axiomatisch eingeführt.

## 16.2 Kolmogorow-Axiome

Von Kolmogorow stammen wichtige Axiome, die zur Theorie der Wahrscheinlichkeit maßgeblich beigetragen haben.  $A$  und  $B$  sind hier beliebige Ereignisse.

- i.  $\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$
- ii.  $P(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{e}_i) = 1$
- iii.  $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Das ganze sei noch einmal kurz in „richtiger“ Sprache zusammengefasst. Die ersten beiden Axiome sollten klar sein: Kein Ereignis hat eine negative Wahrscheinlichkeit und die Wahrscheinlichkeit der vereinigten Elementarereignisse ist gleich Eins. Einem Ereignis wird stets ein reeller Wert zwischen Null und Eins zugewiesen. Verschiebt man das Komma um zwei Stellen nach rechts, dann hat man den zugehörigen Prozentwert – dieser wird in diesem Skript glücklicherweise nie verwendet werden.

<sup>82</sup>Das „ $P$ “ steht für *probability* und kennzeichnet die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis.

<sup>83</sup>In diesem Fall gilt immer  $P(\mathbf{e}_1) = P(\mathbf{e}_2) = \dots = P(\mathbf{e}_n) = \frac{1}{n}$ .

Das dritte Axiom ist auch schnell erklärt. Hat man zwei unvereinbare Ereignisse – das sind Ereignisse, die nie simultan auftreten, wie z.B. das Würfeln der Eins und Sechs gleichzeitig –, dann lassen sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten einfach zur Gesamtwahrscheinlichkeit beider Ereignisse addieren. Bildlich kann man sich diesen Zusammenhang auch so vorstellen: Ein Einheitsquadrat bildet das „Ereignisuniversum“, in dem zwei sich *nicht überlappende* Flächen die Ereignisse  $A$  und  $B$  markieren. Integriert man diese Flächen, so hat man die Gesamtwahrscheinlichkeit  $P(A \cup B)$ .

⊗ **Korollar.**

- $A \cap B \neq \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Sind die Ereignisse nicht disjunkt, so muss den Einzelwahrscheinlichkeiten noch die Schnittmenge, da diese sonst doppelt gezählt würde, abgezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit des „unmöglichen Ereignisses“ ist null, sonst wäre es auch kaum unmöglich. Ist ein Ereignis eine Teilmenge eines anderen Ereignisses, so kann die Wahrscheinlichkeit der Teilmenge nicht größer als die der Obermenge sein. Illustrieren wir dies mit zwei Ereignissen. Welches der folgenden Ereignisse mag wohl wahrscheinlicher sein?

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Telefon klingelt}\} \\ B &= \{\text{Telefon klingelt, klingelt an der Haustür}\} \end{aligned}$$

Bei Ereignismengen zählt das Komma natürlich als  $\vee$ -Verknüpfung, denn als Konjunktion hätten wir keine *getrennten* Ereignisse mehr. Ergibt Sinn, oder?

★ **Beispiel.** *wieder mit dem berüchtigten Würfel.*

I. „idealer“ Würfel

Nehmen wir unseren bekannten Würfelversuch und wenden die Kolmogorow-Axiome an. Da es sich um einen „idealen“ Würfel handelt, gilt für die Elementarereignisse die Laplacesche Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\})$$

Aus dem dritten Axiom lässt sich dann auch schnell die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses berechnen.

$$\begin{aligned} 1 &= P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \\ &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) \\ \Rightarrow P(\{1\}) &= P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

II. „realer“ Würfel

Im Gegensatz zum „idealen“ Würfel – der idealerweise von instruierten Ingenieuren so konstruiert werden müsste, dass jede Seite *exakt* die gleiche Wahrscheinlichkeit erhält – sind beim „realen“ Würfel leichte Divergenzen zu erwarten. Nehme ich einen „realen“ Würfel mit folgender Verteilung:

$$\begin{aligned} P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{5\}) &= \frac{1}{10} \\ P(\{6\}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zugegeben, hier sollte man eher vom „frisierteren“ Würfel sprechen und sich mit solch einem Teil nicht im Casino erwischen lassen. Wie erwartet, kommen im Vergleich beider Würfel für ein beliebiges Ereignis unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten heraus.

$$P(\{\text{gerade}\})$$

$$\text{ideal} = P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{real} = P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{7}{10}$$

$$P(\{\text{ungerade}\})$$

$$\text{ideal} = 1 - P(\{\text{gerade}\}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{real} = 1 - P(\{\text{gerade}\}) = \frac{3}{10}$$

### 16.3 Abhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeit

Bisher wurden nur Versuche von einmaligem Umfang betrachtet. Das soll sich nun ändern und wir betrachten mehrstufige Versuche. Dazu muss aber vorher eine Unterscheidung zwischen **abhängigen** und **unabhängigen** Ereignissen getroffen werden. Unabhängig sind Ereignisse genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  in keinerlei Beziehung zum Ergebnis eines Ereignisses  $B$  steht. Ein typisches Beispiel sind Würfelversuche, da die Ereignisse sich hier nicht beeinflussen. Abhängig hingegen wäre das Ziehen einer Farbkugel aus einem Topf, da beim nächsten Zug die Verteilung eine andere ist<sup>84</sup>. Gut, untersuchen wir das Würfeln von geordneten Paaren mit zwei Würfeln.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \{ & (1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6) \\ & (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6) \\ & \vdots \\ & (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6) \} \end{aligned}$$

Es existieren 36 Elementarereignisse, wobei für „ideale“ Würfel für alle Einzelereignisse  $P(A) = \frac{1}{36}$  gilt. Einmal, weil insgesamt 36 Stück existieren, andererseits, weil auch die Einzelwahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert werden können: Die Wahrscheinlichkeit einer Zahl ist  $\frac{1}{6}$ . Ist die Zahl gefallen und eine weitere soll gewürfelt werden, so existiert zu dieser Wahrscheinlichkeit eine weitere von  $\frac{1}{6}$ , dass auch die zweite Zahl fällt – insgesamt also eine Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{36}$  für ein beliebiges geordnetes Paar.

#### ⌘ BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Als nächstes soll *nur ein Ausschnitt* eines Zufallsraums betrachtet werden. Und zwar genau der, wo ein Ereignis  $B$  bereits eingetreten ist und zu diesem Ereignis die Wahrscheinlichkeit von  $A$  gesucht ist. Auf unsere Musterwürfel übertragen hätten wir z.B. ein Ereignis  $B = \{\text{Zahl} \geq 3\}$  und ein Ereignis  $A = \{\text{gerade Zahl}\}$ . Das Ereignis  $B$  ist bereits eingetreten und wir definieren die bedingte Abhängigkeit  $A$  von  $B$ :

$$P(A|B) := \frac{\text{„Zahl der Versuche, in denen die Zahl gerade und } \geq 3 \text{ ist.“}}{\text{„Zahl der Versuche, wo die Zahl } \geq 3 \text{ ist.“}}$$

<sup>84</sup>Das gilt natürlich nur bei verschiedenfarbigen Kugeln, die *nicht* zurückgelegt werden.



Wird 600-mal gewürfelt, dann existiert folgende bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

Allgemein formuliert sieht die Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten so aus:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) \neq 0$$

Man beachte den Unterschied zwischen  $P(A|B)$  und  $P(B|A)$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Regen in einem Bundesligaspiel fünf Tore in fünf Minuten fallen ist natürlich eine andere, als dass es nach fünf Toren in fünf Minuten plötzlich anfängt zu regnen. Bei unabhängigen Ereignissen bekommt man als *bedingte Wahrscheinlichkeit* stets die *Einzelwahrscheinlichkeit* heraus. Nun kann auch der Unterschied zwischen *unvereinbar* und *unabhängig* noch etwas deutlicher gemacht werden.

$A, B$  heißen voneinander unabhängig, wenn  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  gilt.

- i.*  $A, B$  unvereinbar  $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ii.*  $A, B$  unabhängig  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

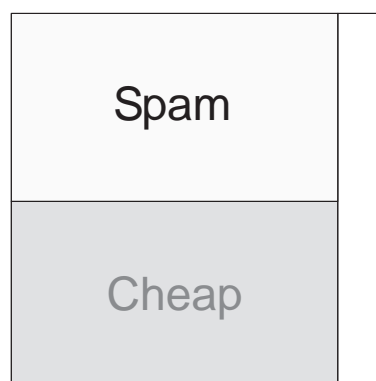
Nun lässt sich auch schnell zeigen, dass bei unabhängigen Ereignissen die bedingte Wahrscheinlichkeit der Einzelwahrscheinlichkeit entspricht<sup>85</sup>.

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

★ **Beispiel.** *Zu viel Spam im Postfach ...*

In unserem E-Mail Postfach befinden sich im Schnitt 90 Prozent Spam und 10 Prozent erwünschte Mails. Jede zweite Spam-Mail, doch nur jede 100. erwünschte Mail, enthält das verräterische Wort „cheap“. Nun befindet sich eine neue Mail im Postfach, die eindeutig das verdächtig-vieldeutige Wort „cheap“ enthält. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei dieser Mail tatsächlich um Spam handelt.

$A := \text{Spam} \quad B := \text{„cheap“}$



Die Abb. zeigt die geometrische Deutung des Postfachs.

<sup>85</sup>Man stelle sich wieder beispielhaft die zwei Würfel vor:  $P(\{5\}|\{2\}) = P(\{5\})$ .

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, da das Ereignis  $B$  bereits eingetreten ist. Klar, doch wie ist dieses Problem zu lösen? ... Wenn kein passender Plan parat ist, dann bietet sich oft die berühmte Methode des Ausprobierens an. Kreieren wir einen Modellfall mit  $n = 1000$  Mails, die sich in unser Postfach verirrt haben.

$$n = 1000 \Rightarrow 900 \text{ Spam und } 100 \text{ erwünschte Mails}$$

Von diesen 900 Spam-Mails enthalten 450 Stück das berüchtigte Wort, wohingegen es bei den 100 erwünschten Mails nur eine einzige ist – insgesamt also 451 „cheap“- Mails.

$$P(A|B) = \frac{450}{451} \approx 0,99$$

Wie von uns erwartet, wird diese Mail leider zu ca. 99 Prozent aus Datenmüll bestehen. Jetzt gehen wir die Sache formal an und benötigen zwei Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} \\ P(A) &= P(B \cap A) \cdot P(A) + P(B \cap \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} \end{aligned}$$

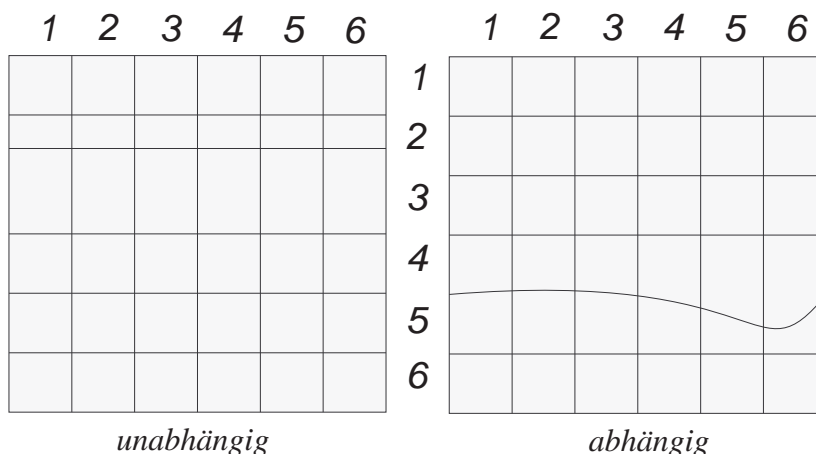
$$P(A|B) = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{451}{1000}} = \frac{9 \cdot 1000}{20 \cdot 451} = \frac{450}{451} \approx 0,99$$

Die Ereignisse „Spam“ und „cheap“ sind nicht *unabhängig*, da aus der Definition zur Unabhängigkeit ein Widerspruch folgt.

$$\underbrace{P(A) \cdot P(B)}_{0,9 \cdot 0,451} \neq \underbrace{P(A \cap B)}_{0,45}$$

### ⌘ UNABHÄNGIGKEIT DURCH VERÄNDERTE WAHRSCHEINLICHKEITEN

Aus dem Spam-Beispiel kann man folgern, dass Ereignisse plötzlich unabhängig werden, wenn sich die Wahrscheinlichkeiten genau so ändern, dass die Definition erfüllt wird. Dazu betrachten wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Würfel.



Die Abb. zeigen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zweier Würfel.

Bei der linken Abbildung sind die Ereignisse mit der „3“ überdeutlich stark verteilt – dennoch sind die Ereignisse wegen der Gleichmäßigkeit noch immer unabhängig. Bei der rechten Abbildung hingegen erkennt man deutlich ein Ungleichgewicht, so dass diese Ereignisse nicht mehr die Forderung der Unabhängigkeit erfüllen.

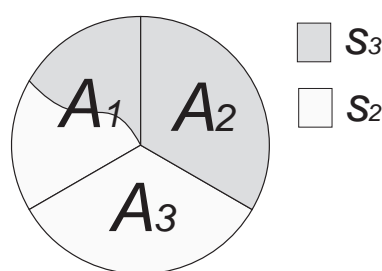
### ⌘ DAS SOG. „ZIEGENPROBLEM“

Dies ist war vor einiger Zeit ein Problem, welches auf Anhieb recht verblüffend wirkte. Man stelle sich vor, man sei Kandidat in einer TV-Show und solle sich für eine von drei verschlossenen Türen entscheiden. Hinter diesen befinden sich jeweils zwei Mal eine Ziege und ein Mal ein Auto. Der Clou: Hat man sich für eine Tür entschieden, so öffnet der Showmaster eine der übrigen Türen – stets eine, hinter der sich eine Ziege befindet – und überläßt einem die Wahl, ob man bei der Entscheidung bleibt oder lieber die andere verschlossene Tür wählen möchte. Wir werden zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit auf den Autogewinn deutlich steigt, wenn man sich stets umentscheidet. Warum? Nun, bleibt man immer bei der ersten Wahl, so existiert eine Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{3}$ , dass man auf Anhieb die richtige Tür gewählt hat. Die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  besteht auch bei der Strategie „stets wechseln“ – hier hingegen bedeutet sie, dass man auf Anhieb die richtige Tür wählt und somit verliert. Hat man hier allerdings zuerst auf eine der Ziegentüren gezeigt, dann wählt man automatisch das Auto, da der Showmaster ja die andere Ziegentür öffnet. Anders ausgedrückt: Entscheidet man sich zur Strategie „stets wechseln“, dann steigt die Gewinnwahrscheinlichkeit auf  $\frac{2}{3}$ . Gehen wir die Sache nun formal an.

Tür 1 wird o.B.d.A. gewählt – ist somit repräsentativ für eine Tür. Die Laplacesche Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gewährt, so dass  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$  gilt.

$A_1$ := Auto hinter Tür 1	$Q_2$ := Quizmaster öffnet Tür 2
$A_2$ := Auto hinter Tür 2	$Q_3$ := Quizmaster öffnet Tür 3
$A_3$ := Auto hinter Tür 3	
$A_1 \cap A_3 = \emptyset$	$S_2 \cap A_2 = \emptyset$
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$	$S_3 \cap A_3 = \emptyset$
$A_2 \cap A_3 = \emptyset$	$S_2 \cap S_3 = \emptyset$
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1$	$P(S_2 \cup S_3) = 1$

Ferner gilt  $S_3 \supset A_2$  und  $S_2 \supset A_3$



Die Abb. zeigt den Handlungsspielraum des Showmasters.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{S_3 \cap A_2}_{A_2} \cup \underbrace{S_2 \cap A_3}_{A_3} \\
 & P(A_3|S_2) = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

...Was lernt man aus diesem Fall? Ganz klar, „Ökos“ bleiben stets bei der ersten Wahl und hoffen darauf, eine Ziege mit  $P(Z_1) = \frac{2}{3}$  zu gewinnen, wohingegen „Otto Benzinverbraucher“ lieber wechselt und mit  $P(A_2 \cup A_3) = \frac{2}{3}$  eine neue Nuckelpinne erhält.

## 16.4 Zufallsgrößen

Bei den sog. *Zufallsgrößen* handelt es sich um alle Zahlenangaben, die mit einer eigenen Wahrscheinlichkeit versehen sind: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wert.“ Prominentes Beispiel ist auch hier der inzwischen allseits bekannte Würfelversuch, da die Ereignisse ja bekanntlich aus Zahlen bestehen. Bevor eine Zufallsgröße genauer definiert wird, sollte erst mal eine Unterscheidung getroffen werden.

- *Diskrete* Zufallsgrößen - Hierbei handelt es sich um Zufallsgrößen, die zwar unendlich viele Werte annehmen dürfen, diese aber *abzählbar* sein müssen.
- *Stetige* Zufallsgrößen - Das sind alle Zufallsgrößen, die *überabzählbare* Werte eines reellen Intervalls annehmen können, wie z.B. die Spannung einer Batterie oder die Temperatur eines beliebigen Objekts<sup>86</sup>.

Von nun an soll eine Zufallsgröße mit  $\mathbf{X}$  ausgedrückt werden. Bitte beachten: Der große Letter symbolisiert die Zufallsgröße an sich, wohingegen die kleinen  $\mathbf{x}$  deren Werte darstellen - das gilt künftig auch analog für die Wahrscheinlichkeiten. Injizieren wir dieses theoretische Konstrukt in einen idealen Würfel.

$$\begin{array}{rclcl} \mathbf{x}_1 & = & 1 & \rightarrow & \mathbf{p}_1 & = & \frac{1}{6} \\ \mathbf{x}_2 & = & 2 & \rightarrow & \mathbf{p}_2 & = & \frac{1}{6} \\ \mathbf{x}_3 & = & 3 & \rightarrow & \mathbf{p}_3 & = & \frac{1}{6} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

### ⌘ ZUFALLSGRÖSSEN ALS FUNKTIONEN

Eine Funktion einer Zufallsgröße ordnet einem Elementarereignis  $\mathbf{e}$  einer Ereignismenge  $\mathbf{E}$  genau eine reelle Zahl  $\mathbf{X}(\mathbf{e})$  zu. Untersuchen wir dies exemplarisch mit der Zufallsgröße, welche beim idealen Würfel den Abstand von der Zahl 3 bestimmt.

$$\mathbf{X} := |\mathbf{X} - 3|$$

$\mathbf{x}_i$	0	1	2	3
$\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Man erkennt, dass sich die Wahrscheinlichkeiten der Werte zu Eins addieren. Darauf wird später noch genauer eingegangen. Kreieren wir nun aus einem Beispiel zweier unabhängiger idealer Würfel mit den Zufallsgrößen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  eine neue Zufallsgröße.

$$\mathbf{X} := \mathbf{X} - \mathbf{Y}$$

$\mathbf{x}_i$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bei solchen Abbildungen verschwinden keine Wahrscheinlichkeiten ins Nirvana, sondern  $\mathbf{p}(\mathbf{X})$ , was wir als Funktion betrachten, ergibt aufsummiert über alle Werte  $\mathbf{x}_i$  immer 1 – das gilt natürlich auch bei unendlich langen Werten.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) = 1$$

<sup>86</sup>Solche skalaren Größen können jeden beliebigen Wert in einem physikalisch vertretbaren Intervall annehmen.

### ⌘ DER ERWARTUNGSWERT

Der *arithmetische Mittelwert* bei  $n$ -Versuchen ist der Erwartungswert. Je größer  $n$  ist, desto näher sollte der empirische Erwartungswert beim arithmetischen Mittel liegen. Bei Laplaceschen Versuchen berechnet er sich einfach darüber, dass man die Laplacesche Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}$  mit der Anzahl des Umfangs  $n$  multipliziert. Für andere Versuche muss die divergente Elementarwahrscheinlichkeit berücksichtigt werden.

$$E[\mathbf{X}] = \mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 \mathbf{x}_2 + \cdots = \sum_k \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k$$

Beim Würfel entspricht der Erwartungswert, wenn man nur oft genug würfelt, der Augenzahl 3,5. Man kann aber auch andere Funktionen von Zufallsgrößen ergrübeln.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5 \\ E[\mathbf{X} := |\mathbf{X} - 3|] &= \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 = 1,5 \\ E[\mathbf{X}^2] &= \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{6} \cdot 6(6+1)(2 \cdot 6 + 1) \right) = \frac{91}{6} \\ E[\sin(\mathbf{X})] &= \frac{1}{6} \cdot \sin(1) + \frac{1}{6} \cdot \sin(2) + \cdots \end{aligned}$$

Demgemäß könnte man die absurdesten Funktionen konstruieren und untersuchen. Man könnte statt dem banalen Würfel auch „die Zahl der Leute, die um 20 h am Hauptbahnhof sich die Beine in den Bauch stehen“ als  $\mathbf{X}$  definieren. Diese Größe ist natürlich abzählbar – doch sie ist im mathematischen Sinne nicht mehr endlich. Für die Wahrscheinlichkeiten nehmen wir einfach einen fiktiv-empirischen Wert an.

$\mathbf{x}_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	...

Die Wahrscheinlichkeiten summieren sich wie erwartet, da der Grenzwert von  $\sum \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  gleich 1 ist. Besonders haarsträubend wird es, wenn der Erfahrungswert keine konvergente Reihe mehr bildet und bei einer Funktion wie  $2^{\mathbf{X}}$  gebildet werden soll. Dann existiert aufgrund der Divergenz der Reihe ein unendlicher(!) Erwartungswert.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} (i-1) \\ E[2^{\mathbf{X}}] &= \frac{1}{2} \cdot 2^0 + \frac{1}{4} \cdot 2^1 + \frac{1}{8} \cdot 2^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty \end{aligned}$$

## 16.5 Streubreite, Varianz und Standardabweichung

Bei einem Zufallsversuch oder einer Stichprobe von genügend großem Umfang  $n$  werden die Ereignisse eher selten *genau* den Erwartungswert treffen, sondern sich dafür irgendwo in dessen Umgebung einfinden. Ob sie nun alle ziemlich nah oder weit davon entfernt liegen, hängt natürlich vom Versuch an sich oder anderen Umständen ab. Entscheide ich mich z.B. spontan, genau dort meine zwei Tage Urlaub zu verbringen, wo der Erwartungswert der Tagestemperatur bei 13° Celsius liegt, dann würde ich diesen Wert in Plymouth (UK) oder auch in Minneapolis (USA) antreffen. Doch so ähnlich die Erwartungswerte auch sind, die Streubreiten sprechen eine völlig andere Sprache: Während sich in Plymouth die Temperatur über das Jahr verteilt kaum vom Erwartungswert – dem empirischen Jahresmittelwert – unterscheidet, komme ich in Minneapolis im Sommer bei Temperaturen von annähernd 40° mächtig ins Schwitzen und im Winter friert mir bei klirrender Kälte der Finger in der Nase fest.

Um den Abstand zum Erwartungswert zu ermitteln, definieren wir eine Funktion, die als **Varianz** bezeichnet wird.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\mathbf{X}] &:= E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^2] \\
 &= E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])] \\
 &= E[\mathbf{X}^2] - E[E[\mathbf{X}]\mathbf{X}] - E[E[\mathbf{X}]\mathbf{X}] + E[(E[\mathbf{X}])^2] \\
 &= E[\mathbf{X}^2] - (E[\mathbf{X}])^2 - (E[\mathbf{X}])^2 + (E[\mathbf{X}])^2 \\
 &= E[\mathbf{X}^2] - (E[\mathbf{X}])^2
 \end{aligned}$$

Da es sich um das quadratische Mittel handelt – man hätte die Varianz auch als Betragsfunktion definieren können, doch solche Funktionen sind äußerst unbequem zu differenzieren –, muss zur Kompensation noch die Wurzel gezogen werden. Dann erhalten wir die **Standardabweichung**  $\sigma$ .

$$\sigma(\mathbf{X}) := \sqrt{\text{Var}[\mathbf{X}]}$$

In der „realen Welt“ findet man die Standardabweichung häufig bei leicht schwankenden Angaben, wie z.B. der Lebensdauer einer Batterie:  $\pm 2$  Jahre. Illustrieren wir das Gelernte völlig abstrakt mit einer Zufallsgröße  $\mathbf{X}$ .

1. Die Zufallsgröße  $\mathbf{X}$  nimmt in 25% der Fälle den Wert 4, in 45 % den Wert 5 und in 30 % der Fälle den Wert 6 an.
2. Die Zufallsgröße  $\mathbf{Y}$  nimmt in 5% der Fälle den Wert 10, in 60 % den Wert 15 und in 35 % der Fälle den Wert 20 an.

Gesucht ist der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ .

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{X}] &= 0,25 \cdot 4 + 0,45 \cdot 5 + 0,3 \cdot 6 = 5,05 \\
 E[\mathbf{Y}] &= 0,05 \cdot 10 + 0,6 \cdot 15 + 0,35 \cdot 20 = 16,5 \\
 V[\mathbf{X}] &= 0,25 \cdot 16 + 0,45 \cdot 25 + 0,3 \cdot 36 - 25,5025 = 0,5475 \\
 V[\mathbf{Y}] &= 0,05 \cdot 100 + 0,6 \cdot 225 + 0,35 \cdot 400 - 272,25 = 7,75 \\
 \sigma(\mathbf{X}) &= \sqrt{0,5475} \approx 0,74 \\
 \sigma(\mathbf{Y}) &= \sqrt{7,75} \approx 2,78
 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel wäre nicht komplett, wenn nicht auch hier der ideale Würfel noch erwähnt würde. Glauben Sie es oder nicht, dieses Skript wurde wirklich *nicht* von einem Würfelhersteller gesponsert!

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{X}] &= 0,1\bar{6} \cdot 1 + 0,1\bar{6} \cdot 2 + 0,1\bar{6} \cdot 3 + 0,1\bar{6} \cdot 4 + 0,1\bar{6} \cdot 5 + 0,1\bar{6} \cdot 6 = 3,5 \\
 V[\mathbf{X}] &= 0,1\bar{6} \cdot 1 + 0,1\bar{6} \cdot 4 + 0,1\bar{6} \cdot 9 + 0,1\bar{6} \cdot 16 + 0,1\bar{6} \cdot 25 + 0,1\bar{6} \cdot 36 - 12,25 \approx 3 \\
 \sigma(\mathbf{X}) &= \sqrt{3} \approx 1,7
 \end{aligned}$$

#### † Statistikerwitz.

ZWEI BAYERN SITZEN IM WIRTSCHAUS. DER EINE VERDRÜCKT EINE GANZE KALBSHAXE UND DER ANDERE TRINKT ZWEI MASS WEISSBIER. STATISTISCH GESEHEN IST DAS FÜR JEDEN EINE MASS BIER UND EINE HALBE HAXE, DOCH DER EINE HAT SICH ÜBERFRESSEN UND DER ANDERE IST BESOFFEN.

### ⌘ ERWARTUNGSWERT EINFACH MAL RÜCKWÄRTS KONSTRUIERT

Bisher wurden Erwartungswerte zu Ereignissen geradewegs berechnet. Drehen wir die Sache schlicht um und bilden zur Abwechslung den Erwartungswert irgendeines Ereignisses, am besten den des idealen Würfels, auf irgendeine Münze ab. Gesucht sind also zwei Werte, irgendwie auf die Münze gestanzt, die in Kombination zweier Wahrscheinlichkeiten  $p$  und  $q = 1 - p$  kurioserweise genau den Erwartungswert des idealen Würfels ergeben. Gibt's das überhaupt? Und wenn ja, wie geht man dabei vor?

Da vier Unbekannte existieren, nämlich die zwei Werte und deren Wahrscheinlichkeit, wäre es doch sinnvoll, wenn wir  $p$  ganz stumpf gleich  $0,5$  setzen und die Werte  $x_1 = 3,5 - \lambda$  und  $x_2 = 3,5 + \lambda$  nehmen. Mit diesem faulen Akt ist der Erwartungswert stets erfüllt, denn wir bewegen uns schließlich mit gleichem Abstand um ihn.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}] &= x_1 \cdot p + x_2 \cdot q \\ &= (3,5 - \lambda) \cdot 0,5 + (3,5 + \lambda) \cdot 0,5 \\ &= 3,5 \end{aligned}$$

Das war nicht sonderlich schwierig, fehlt aber noch  $E[\mathbf{Y}^2]$  zur Bestimmung von  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \frac{91}{6} &= E[\mathbf{Y}^2] \\ &= x_1^2 \cdot p + x_2^2 \cdot q \\ &= (3,5 - \lambda)^2 \cdot 0,5 + (3,5 + \lambda)^2 \cdot 0,5 \\ &= 0,5(3,5^2 - 7\lambda + \lambda^2 + 3,5^2 + 7\lambda + \lambda^2) \\ &= 3,5^2 + \lambda^2 \\ \lambda^2 &= \frac{91}{6} - 3,5^2 \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} \\ \lambda &\approx 1,7 \end{aligned}$$

Somit folgen für  $x_1 \approx 1,8$  und  $x_2 \approx 5,2$ . Nimmt man einen Filzstift und schreibt diese Werte auf eine nicht-gezinkte Münze, so erhält man denselben Erwartungswert, wie man ihn auch beim idealen Würfel erhalten würde.

## 16.6 Binominalverteilung

Um zur Binominalverteilung zu gelangen, werden zuvor Zufallsexperimente mit nur zwei sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen als *Bernoulli-Versuche*<sup>87</sup> bezeichnet. Diese Versuche haben stets eine konstante Wahrscheinlichkeit  $p$  und eine konstante Gegenwahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$ . Ferner sind sie unabhängig. Klassische Beispiele sind hier der Münzwurf oder ein Urnenmodell mit Zurücklegen<sup>88</sup>. Interessant wird es, da die Versuchsreihe auf mehrere Stufen ausgebaut wird. Bleiben wir bei der Münze und werfen sie  $n$  Mal hintereinander. Hier ordnen wir der Zufallsgröße  $\mathbf{X}$  die Anzahl des Ereignisses  $A := \{\text{Kopf}\}$  bzw.  $\bar{A} := \{\text{Zahl}\}$  bei  $n$  Versuchen zu.

Erste Überlegung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $A$  genau null Mal bei einem Stichprobenumfang von  $n = 20$  Versuchen auftritt. Schnappt man sich spontan eine Münze, probiert es aus, dann wird man nach einiger Zeit geneigt sein, zu behaupten, dass diese Wahrscheinlichkeit  $P[\mathbf{X} = 0]$  quasi unmöglich ist. Ist sie auch fast, denn nach der Pfadmultiplikation gilt:

$$P[\mathbf{X} = 0] = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \left(\frac{1}{2^{20}}\right)$$

<sup>87</sup> Jakob Bernoulli, schweizer Mathematiker, 1655-1705

<sup>88</sup> Auf die Urne bezogen dürfen aber nur zwei komplementäre Ereignisse definiert werden.

Was aber, wenn wir uns für die Wahrscheinlichkeit von  $P[\mathbf{X} = 9]$  interessieren? Offensichtlich gibt es hier nicht nur *einen* einzigen möglichen Pfad, so dass, da hier alle Pfade die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, die Anzahl der Pfade mit der Wahrscheinlichkeit *eines* Pfades multipliziert werden muss. Wie viele Möglichkeiten gibt es also, um 9 Elemente aus 20 Elementen – ohne Zurücklegen und Wiederholungen – auszuwählen? Keine Frage, erneuter Auftritt der Binominalkoeffizienten!

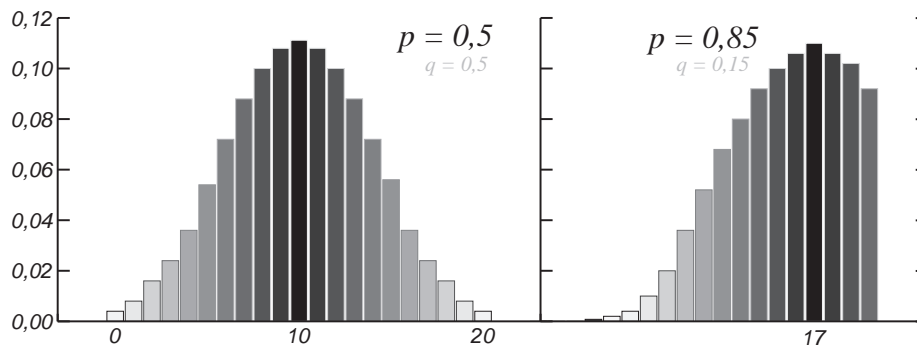
$$P[\mathbf{X} = 9] = \binom{20}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0,16$$

Allgemein gesehen müssen  $p$  und  $q$  natürlich keineswegs identisch sein, so dass bei  $n$  Versuchen die Pfade von  $A$  mit den Pfaden zu  $\bar{A}$  multipliziert werden, um so die Wahrscheinlichkeit für *einen* Pfad zu erhalten.

$$\underbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p)}_{A: k\text{-mal}} \cdot \underbrace{(q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q)}_{\bar{A}: (n-k)\text{-mal}} = p^k \cdot q^{n-k}$$

Da aber bei allen Zufallsgrößen mit Ausnahme von  $X = 0$  und  $X = n$  mehrere mögliche Pfade existieren, muss die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Pfades noch mit der Anzahl der Kombinationen multipliziert werden. Somit gelangt man schließlich zur allgemeinen Wahrscheinlichkeit der diskreten Binominalverteilung.

$$P[\mathbf{X} = k] = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$



Die Abb. zeigt eine mögliche Binominalverteilung des Münzwurfs bei  $n = 20$  Versuchen.

Noch ein kleines Beispiel dazu: „Jeder zehnte Mensch sei Linkshänder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 Leuten genau zwei Linkshänder sind?“

Ist dies ein *Bernoulli-Versuch*? Ja, denn es existieren nur zwei sich gegenseitig ausschließende unabhängige Ereignisse  $A := \{\text{Linkshänder}\}$  und  $\bar{A} := \{\text{Rechtshänder}\}$ .

$$P[\mathbf{X} = 2] = \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} \approx 0,28$$

## † Statistikerwitz II.

GEGEBEN SEI EIN LAGERHAUS UNDEFINierter GRÖSSE. DIESES SEI EXAKT ZU ZWEI DRITTELN MIT WÜRSTEN UND ZU EINEM DRITTEL MIT EIERN GEFÜLLT. EIN DICKER HUND BETRIT DAS LAGERHAUS UND NACH VERLASSEN DESSEN IST ES NUR NOCH ZUR HÄLFTE MIT WÜRSTEN UND ZUR HÄLFTE MIT EIERN GEFÜLLT. EIN ANWESENDER MATHEMATIKER, DER SOEBEN EINIGE STATISTISCHE REZEPTE ERLERNT HAT, FOLGERT SOFORT: „EIN HUND LEGT EIER!“



## 16.7 Poisson-Verteilung

Die *Poisson-Verteilung* ist im Unterschied zur Binominalverteilung eine etwas andere Art der Berechnung einer Zufallsgröße  $\mathbf{X}$ , welche im Zusammenhang mit Ereignissen geringer Wahrscheinlichkeit auftritt. Um zur ihr zu gelangen, soll über den Umweg der Binominalverteilung die Formel schrittweise ermittelt werden. Dazu betrachten wir ein anschauliches Beispiel mit einem extrem großen Aquarium – in dem sich allerlei Fische der Anzahl  $n$  tummeln. Nun soll aus diesem Aquarium eine gewisse Teilmenge an Wasser hinaus genommen werden, beispielsweise  $1\text{ m}^3$ , und der Zufallsgröße  $\mathbf{X}$  wird die Anzahl an Fischen in dieser Teilmenge zugeordnet. Vereinfachend soll das große Aquarium lieber in viele einzelne Kammern der Anzahl  $m$  unterteilt werden. Existiert insgesamt nur ein Fisch bei  $m$  Kammern, so ist Wahrscheinlichkeit, dass sich der Fisch in der  $k$ -ten Kammer befindet genau  $\frac{1}{m}$ . Zuvor muss allerdings noch folgendes gesetzt werden: Erstens ordnen wir der „Fischdichte“ die *konstante* Größe  $\lambda = \frac{n}{m}$  zu – diese Größe ist analog zum Erwartungswert. Zweitens dürfen die Werte beliebig groß sein, sind also  $\in \mathbb{N}_0$ , was zwar nicht besonders realistisch, für dieses Gedankenmodell aber notwendig ist. Gut, nun soll mit der Krücke der Binominalverteilung die Formel kreiert werden. Gesucht ist als erster Schritt die Wahrscheinlichkeit für genau vier Fische in einer bestimmten Kammer. Dazu wird die Wahrscheinlichkeit, dass sich *genau ein* Fisch in der Kammer befindet mit der Gegenwahrscheinlichkeit multipliziert. Schließlich müssen wir noch die Kombinationen für 4 Fische mit einplanen.

$$P[X = 4] = \binom{n}{4} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-4}$$

Jetzt wird der Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  betrachtet, d.h. aus dem riesigen Aquarium wird ein endloser Ozean mit einer Myriade an Kammern. Dazu wird der hilfreiche Annäherungstrick mit der  $e$ -Funktion angewandt. Zur Erinnerung:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Die Variablen  $n$  und  $m$  drücken wir mit Hilfe der Dichte  $\lambda$  aus, da ansonsten unsere Formel annulliert würde. Aufgrund des Grenzübergangs  $n \rightarrow \infty$  sind gewisse Subtraktionen bei  $n$  natürlich zu vernachlässigen.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P[\mathbf{X} = 4] &= \binom{n}{4} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-4} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \lambda^4}{n^4 \cdot 4!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^4}{4!} \cdot e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Den allgemeinen Fall der *Poisson-Verteilung*  $P[\mathbf{X} = k]$  kann man nun aus der Formel ohne größere Mühe einfach ablesen.

$$P[\mathbf{X} = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Unter bestimmten Voraussetzungen der Parameter kann die *Binominalverteilung* durch die *Poisson-Verteilung* substituiert werden. Das gilt i.A. für folgenden Fall.

$$\begin{aligned} \lambda &= n \cdot p < 10 \\ n &> 1500 \cdot p \end{aligned}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann die Poisson-Verteilung anstelle der Binominalverteilung genutzt werden. Das illustriert dann auch das nachfolgende Beispiel.

★ **Beispiel.** zur Substitution der Binominalverteilung.

Bei der traditionellen Abfüllung von Weinen sei ein prozentualer Anteil von durchschnittlich 1 % „korkiger“ Weine zu erwarten. Bei einer Stichprobe vom Umfang  $n = 800$  ist die Wahrscheinlichkeit für genau 10 „korkige“ Weine gesucht.

Der Erwartungswert liegt bei  $\lambda = 800 \cdot 0,01 = 8$  Stück. Der Zufallsgröße  $\mathbf{X}$  wird somit die Anzahl an „korkigen“ Weinen zugeordnet. Aufgrund der großen Stichprobe und der eher geringen Erfolgswahrscheinlichkeit kann die Binominalverteilung hier durch die Poisson-Verteilung ersetzt werden. Berechnen wir zuerst die Wahrscheinlichkeit durch die Binominalverteilung.

$$P[\mathbf{X} = 10] = \binom{800}{10} \cdot 0,01^{10} \cdot 0,99^{790} \approx 0,1$$

Somit liegt die Wahrscheinlichkeit für zehn „korkige“ Weine bei einer Stichprobe vom Umfang  $n = 800$  bei ca. zehn Prozent. Wendet man stattdessen die Poisson-Verteilung an, so kommt man auf dasselbe Ergebnis.

$$P[\mathbf{X} = 10] = \frac{8^{10}}{10!} \cdot e^{-8} \approx 0,1$$

✂ ÜBERPRÜFUNG DER POISSON-VERTEILUNG

Gewisse Eigenschaften der Poisson-Verteilung sollen überprüft werden, insbesondere müssen sich alle Einzelwahrscheinlichkeiten zu eins aufsummieren und es muss überprüft werden, ob  $\lambda$  tatsächlich dem Erwartungswert  $E[\mathbf{X}]$  entspricht. Bitte noch einmal beachten, dass bei der *Poisson-Verteilung* der Wertebereich – im Gegensatz zum Stichprobenumfang  $n$  – durchaus unendlich werden kann. Zuerst eine legitime Umformung.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Diese Reihe entspricht für  $n \rightarrow \infty$  zufälligerweise genau der  $e$ -Funktion. Wir erinnern uns an die Formel für die  $e$ -Funktion, die für  $n \rightarrow \infty$  genau der Reihe entspricht, mit der  $e^{-\lambda}$  multipliziert wird.

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &= \binom{n}{0} 1^n \left(\frac{x}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \left(\frac{x}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} 1^{n-3} \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \dots \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 1 \cdot \frac{x^3}{n^3} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Mit diesem Schritt ist der Beweis nur noch eine Kleinigkeit, dass die Einzelwahrscheinlichkeiten aufsummiert tatsächlich zu eins werden. Analog danach die Überprüfung des Erwartungswerts als gewichtetes Mittel. Man beachte die Indextransformation<sup>89</sup>.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1 \\ E[\mathbf{X}] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

<sup>89</sup>Diese ist nötig, um die Nulldivision zu umgehen.

### ⌘ ANNÄHERUNG MIT DER POISSON-VERTEILUNG.

Es wurde bereits erwähnt, dass die Poisson-Verteilung nur bei sehr geringen Wahrscheinlichkeiten und großen Stichproben geeignet ist. Ist das nicht der Fall, dann kann dennoch die Poisson-Verteilung genutzt werden, um den gesuchten Wert halbwegs abzuschätzen. Eine weitere Kuriosität ist der unendliche Wertebereich, der nicht auf die Anzahl der Stichproben beschränkt ist – denn im Vergleich zur Binominalverteilung ist es auch möglich, bei einem Stichprobenumfang von  $n = 1000$  die Wahrscheinlichkeit für  $P[X = 1001]$  zu errechnen und *nicht* null zu erhalten. Wie dem auch sein, wir betrachten nun einen Fall, der nicht den Anforderungen an die Poisson-Verteilung entspricht, aber dennoch durch sie brauchbar angenähert werden kann.

Angenommen, jeder 20. Fernseher der Firma „Sonny“ fällt auf dem Weg vom Lager zum Laden vom Laster. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Fahrt mit einer Ladung von 1000 Fernsehern genau vier Stück vom Laster fallen, obwohl immerhin 50 erwartet werden? Betrachten wir dazu beide Verteilungen.

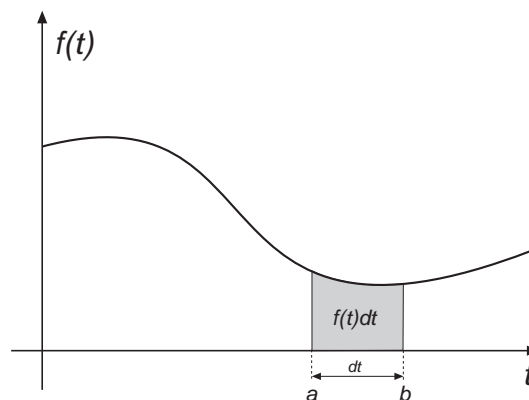
$$P[X = 4] = \binom{1000}{4} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^4 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{996} \approx 1,7 \cdot 10^{-17}$$

$$P[X = 4] = \frac{50^4}{4!} \cdot e^{-50} \approx 5 \cdot 10^{-17}$$

Wie man erkennt, existiert eine leichte Abweichung bei der Poisson-Verteilung. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit an sich so gering, dass es im eigenen Ermessen liegt, ob man die minimale Abweichung in Kauf nimmt oder nicht.

## 16.8 Kontinuierliche Zufallsgrößen

Im Vergleich zu den *diskreten* Zufallsgrößen, die bis dato ausschließlich betrachtet und angewendet wurden, wird nun bei einer *kontinuierlichen* Zufallsgröße  $\mathbf{X}$  mit dem reellen Wertebereich  $-\infty < \mathbf{X} < \infty$  meist eine physikalische Größe im bestimmten Intervall betrachtet. Dabei kann es sich beispielsweise um die Lebensdauer einer Glühlampe in Abhängigkeit der Zeit  $t$  handeln. Man erkennt offensichtlich, dass hier mit Integralen gearbeitet wird, denn die Wahrscheinlichkeit der Lebensdauer einer Glühlampe zwischen  $a$  und  $b$  Tagen mit  $a < b$  entspricht genau der Fläche unter der Dichtefunktion im Intervall  $[a, b]$ . Dies illustriert die nun folgende Abbildung.



Die Abb. zeigt eine mögliche Dichtefunktion für die Lebensdauer eines Objektes.

Ist die Dichtefunktion bekannt, so kann mit dem bestimmten Intervall die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis im Intervall  $[a, b]$  liegt, ausgerechnet werden.

$$P[\mathbf{X} \in [a, b]] = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Es müssen natürlich bestimmte Voraussetzungen gelten, z.B. muss die gesamte integrierte Fläche zur Eins werden, denn die entspricht schließlich dem *sicheren* Ereignis. Weiterhin sind negative Integrale, also Flächen unter der Abszisse ausgeschlossen. Für die Wahrscheinlichkeit eines Punktes muss ferner die Wahrscheinlichkeit null gelten, denn dabei handelt es sich um keine Fläche, so dass  $\Delta t = 0$  gilt. Das wäre z.B. der Fall, wenn die Wahrscheinlichkeit für genau 42,000... Tage gesucht ist.

$$\begin{aligned} i. \quad & \int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \\ ii. \quad & f(x) \geq 0 \\ iii. \quad & P[\mathbf{X} = [a, a]] = \int_a^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Auch der Erwartungswert als gewichtetes Mittel wird hier über das Integral ermittelt.

$$\begin{aligned} \text{diskret} \quad E[\mathbf{X}] &= \sum_k x_k \cdot p_k \\ \text{kontinuierlich} \quad E[\mathbf{X}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

★ **Beispiel.** *Einfaches Beispiel einer Dichtefunktion.*

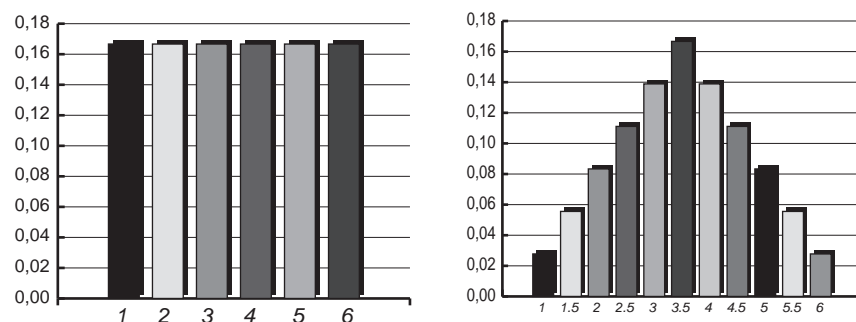
Der Messwert  $\mathbf{X}$  auf dem Intervall  $[2, 4]$  sei gleichverteilt. Gesucht ist der Erwartungswert  $E[\mathbf{X}]$ , der Erwartungswert des Quadrats  $E[\mathbf{X}^2]$ , Varianz  $V[\mathbf{X}]$  und die Standardabweichung  $\sigma[\mathbf{X}]$ . Da die Messgröße auf genanntem Intervall gleichverteilt ist, bedeutet dies, dass alle Wahrscheinlichkeiten in diesem Intervall liegen und aufsummiert zum *sicheren Ereignis* führen. Die Dichtefunktion auf dem Intervall der Länge „2“ ist folglich eine Konstante,  $f(x) = 0,5$ , zu der nun der Erwartungswert berechnet wird.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= \int_2^4 x \cdot f(x) dx &= x \cdot 0,5 \, dx \\ &= \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_2^4 &= 3 \\ E[\mathbf{X}^2] &= \int_2^4 x^2 \cdot f(x) dx &= x^2 \cdot 0,5 \, dx \\ &= \left[ \frac{1}{6} x^3 \right]_2^4 &= 9\frac{1}{3} \\ V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 &= \frac{1}{3} \\ \sigma[\mathbf{X}] &= \sqrt{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dieses kleine Beispiel zeigt einerseits, dass mit denselben Formeln der diskreten Verteilung auch hier gearbeitet werden kann, andererseits beugt es der Versuchung vor, den Erwartungswert des Quadrats fälschlicherweise stumpf durch den quadrierten Erwartungswert auszurechnen – die Werte wachsen beim Quadrieren schließlich nicht linear.

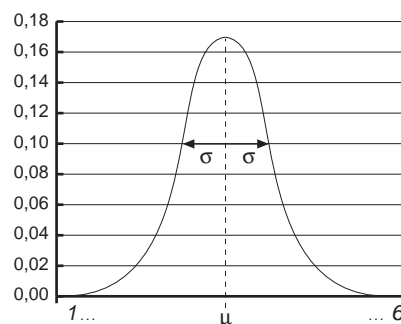
## 16.9 Gaußsche Normalverteilung

Die sog. „Normalverteilung“, die bei vielen Anwendungen eine wichtige Rolle spielt, wurde von Gauß<sup>90</sup> bei seinen Arbeiten über zufällige Fehler bei astronomischen Beobachtungen entwickelt. Die Kurve ist daher auch als „Gaußsche Fehlerkurve“ bzw. in der anschaulichen Variante als „Gaußsche Glockenkurve“ bekannt. Bevor die Kurve genauer untersucht werden soll, wird als Einleitung eine Überlegung mit dem bestens vertrauten idealen Würfel angestellt. Dieser soll diesmal einmal, zweimal und 100 mal hintereinander gewürfelt werden, um daraufhin das arithmetische Mittel des Ergebnisses zu bilden. Betrachten wir dazu die Verteilung als Balkendiagramm.



Die Abb. zeigt die Verteilung des arithmetischen Mittels bei einem und zwei Würfeln.

Bei einem Wurf ist die Sache klar. Man erhält die Ereignisse der Augenzahlen 1 bis 6 mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{6}$ . Würfelt man zwei Mal hintereinander und bildet das arithmetische Mittel des Wurfs, so existieren auch „krumme“ Werte. Für die beiden Ereignisse 1 und 6 gilt die Wahrscheinlichkeit *eines* Pfades,  $\frac{1}{6^n}$ , da sie nur durch die Ereignisse der Tupel (1,1) bzw. (6,6) auftreten können, bei allen anderen Ereignissen gibt es mehrere Pfade. Wie man am Diagramm erkennt, nimmt die Verteilung langsam die Form einer Kurve an. Gehen wir direkt zu 100 Würfeln, so wissen wir bereits die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse am Rande,  $\frac{1}{6^{100}}$ , denn die Eins oder Sechs als Ereignis erhält man nur dann, wenn auch 100 Mal die Eins oder Sechs geworfen wird. Würfelt man 99 Mal die Eins und einmal die Zwei, dann erhält man als arithmetisches Mittel  $1\frac{1}{100}$ , wobei das  $\frac{1}{100}$  dann auch gleichzeitig die Schrittweite zwischen den einzelnen Ereignissen angibt. Würde ich tatsächlich 600 Ereignisse in das Balkendiagramm mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten quetschen, so müsste eine Art Glockenkurve herauskommen, die in der folgenden Abbildung skizziert wird.



Die Abb. zeigt eine wahrscheinliche Verteilung des arithmetischen Mittels bei 100 Würfeln.

<sup>90</sup> Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker und Astronom, 1777-1855

Suchen wir nun den Erwartungswert – was sich nicht sonderlich schwierig gestalten wird – und die Varianz – was sich schon etwas kritischer offenbart –, dann können wir daraus die Standardabweichung  $\sigma$ , die in der Skizze bei 0,1 geschätzt wird, berechnen. Für den Erwartungswert gilt die nun folgende Berechnung.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= E\left[\frac{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_{100}}{100}\right] \\ &= \frac{1}{100} \cdot E[\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_{100}] \\ &= \frac{1}{100} \cdot [E[\mathbf{X}_1] + E[\mathbf{X}_2] + \dots + E[\mathbf{X}_{100}]] \\ &= \frac{350}{100} = 3,5 \end{aligned}$$

Das war keine große Überraschung. Erläuternd zur Rechnung sei noch einmal angemerkt, dass konstante Faktoren aus dem Erwartungswert herausgezogen werden dürfen und der Erwartungswert einer Summe von Ereignissen – wenn es sich um *unabhängig* und *identisch verteilte* Zufallsgrößen handelt – ist die Summe der Erwartungswerte der Ereignisse. Nun zur Berechnung des Quadrats.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}^2] &= E\left[\left(\frac{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_{100}}{100}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{100^2} \cdot E[(\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_{100}) \cdot (\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_{100})] \\ &= \frac{1}{100^2} \cdot [E[\mathbf{X}_1^2] + E[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] + \dots + E[\mathbf{X}_{100}^2]] \\ &= \frac{1}{10000} \cdot \left(\frac{91}{6} \cdot 100 + 3,5^2 \cdot 9900\right) \end{aligned}$$

Zur Rechnung ist ein wenig Erklärung von Nöten: Durch das Quadrat existieren insgesamt 10000 Summanden, von denen genau hundert aus den Quadraten der Erwartungswerte,  $\mathbf{X}_1^2, \mathbf{X}_2^2, \dots, \mathbf{X}_{100}^2$ , bestehen. Diese haben alle denselben Erwartungswert, nämlich  $\frac{91}{6}$ , was bereits relativ am Anfang dieses Kapitels berechnet wurde. Des Weiteren existieren folglich 9900 gemischte Terme,  $(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2), (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3), \dots$ , die aufgrund der Unabhängigkeit multipliziert werden dürfen und man somit die letzte Umformung verstehen sollte. Die Varianz und Standardabweichung lassen sich nun einfach ausrechnen.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{X}) &= E[\mathbf{X}^2] - (E[\mathbf{X}])^2 \\ &= \frac{91}{6} \cdot \frac{1}{100} + 3,5^2 \cdot 0,99 - 3,5^2 \\ &= \frac{91}{6} \cdot \frac{1}{100} - 3,5^2 \cdot \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{91}{6} - 3,5^2\right) \\ \sigma(\mathbf{X}) &= \sqrt{V(\mathbf{X})} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{91}{6} - 3,5^2} \\ &\approx \frac{1}{10} \cdot \sqrt{3} \approx 0,17 \end{aligned}$$

Ein etwas abgefahreneres aber dennoch anschauliches Beispiel ist der Tropfen **Tinte** auf einem Streifen **Löschpapier**. Was sich wie ein Relikt aus der „Pre-Keyboard-Ära“ anhört und mit der gaußschen Verteilung nur wenig am Hut zu haben scheint, soll nun näher beleuchtet werden. Dazu stelle man sich folgenden Fall vor. Ein Tropfen Tinte wird auf Löschpapier getropft – dabei wird jedes Partikel ca.  $\frac{10^8}{s}$  angestoßen und um  $10^{-6}$  Meter nach links oder rechts mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{2}$  bewegt. Wie sieht so ein Tintenfleck nach einer Sekunde aus?

Der Zufallsgröße  $\mathbf{X}$  ordnen wir die Position eines Artikels nach einer Sekunde zu. Im Modell existieren somit  $10^8$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsgrößen. Aufgrund der „fifty-fifty“-Wahrscheinlichkeit ist der Erwartungswert schon jetzt klar.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= E[\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_{10^8}] \\ &= E[\mathbf{X}_1] + E[\mathbf{X}_2] + \cdots + E[\mathbf{X}_{10^8}] \\ &= 10^8 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Etwas delikater hier wieder die Berechnung des Quadrates. Dabei wird analog wie beim letzten Beispiel vorgegangen.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}^2] &= E[(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_{10^8})(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_{10^8})] \\ &= E[\mathbf{X}_1^2] \cdot 10^8 + (10^{16} - 10^8) \cdot E[\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2] \\ &= 10^8 \cdot 10^{-12} m^2 \\ &= 10^{-4} m^2 \end{aligned}$$

Hier betrachten wir wieder getrennt die  $10^8$  gemischten Terme mit den einzelnen Quadraten – diese ergeben sich aus der Gesamtzahl an Termen, also  $10^{16}$ , minus den Quadraten. Die gemischten Terme können wir aber getrost ignorieren, da einzelnen Erwartungswerte multipliziert zu null werden. Für die Quadrate hingegen gilt:  $10^8 \cdot (0,5 \cdot 10^{-12} m^2 + 0,5 \cdot 10^{-12} m^2)$ . Damit können wir nun die Varianz und die Standardabweichung ermitteln.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{X}) &= E[\mathbf{X}^2] - (E[\mathbf{X}])^2 \\ &= 10^{-4} m^2 \\ \sigma(\mathbf{X}) &= \sqrt{V(\mathbf{X})} \\ &= \frac{1}{100} m \end{aligned}$$

Die Antwort auf die Frage lautet also, dass der Tropfen nach einer Sekunde um einen Zentimeter „ausgeschmiert“ ist. Erwähnenswert ist noch, dass die Varianz zwar linear wächst, doch die Standardabweichung es aufgrund der Wurzel weitaus langsamer tut.

## 16.10 Zentraler Grenzwertsatz

## 16.11 Schätzen von Erwartungswert und Varianz in der mathematischen Statistik

## A Griechisches Alphabet

Hilfreich zum Lesen mathematisch orientierter Texte ist die Kenntnis des griechischen Alphabets. Bitte beachten: Wie im Lateinischen gibt es auch hier große und kleine Buchstaben.

Griechischer Buchstabe	Name
$A \quad \alpha$	Alpha
$B \quad \beta$	Beta
$\Gamma \quad \gamma$	Gamma
$\Delta \quad \delta$	Delta
$E \quad \varepsilon$	Epsilon
$Z \quad \zeta$	Zeta
$H \quad \eta$	Eta
$\Theta \quad \vartheta$	Theta
$I \quad \iota$	Iota
$K \quad \kappa$	Kappa
$\Lambda \quad \lambda$	Lambda
$M \quad \mu$	My
$N \quad \nu$	Ny
$\Xi \quad \xi$	Xi
$O \quad o$	Omikron
$\Pi \quad \pi$	Pi
$P \quad \rho$	Rho
$\Sigma \quad \sigma$	Sigma
$T \quad \tau$	Tau
$\Upsilon \quad \upsilon$	Ypsilon
$\Phi \quad \varphi$	Phi
$X \quad \chi$	Chi
$\Psi \quad \psi$	Psi
$\Omega \quad \omega$	Omega



## B Mathematische Fachausdrücke im Englischen

Das Lesen von Mathebüchern auf Englisch kann sich auch mit fortgeschrittenen Englischkenntnissen als äußerst tricky erweisen. Aus diesem Grunde sollen zu den wichtigsten Fachausdrücken, die in diesem Skript zur Anwendung kommen, die englischen Vokabeln aufgelistet werden.

Deutsch	Englisch
abbilden	<i>to map</i>
Äquivalenz	equivalence
Äquivalenzklasse	equivalence class
allgemeingültig	logically valid
Allquantor	universal quantifier
Antinomie	paradox
Aussage	sentence
Aussagenlogik	propositional logic
Beweis	proof
Definitionsbereich	domain
Disjunktion	disjunction
Distributivgesetz	distributive law
Durchschnitt	intersection
Einselement	unit
Gleichheit	equality
Herleitung	derivation
Komposition	composition
transitive Hülle	transitive closure
Identität	identity
Induktion	induction
Junktoren	propositional connectives
Konjunktion	conjunction
Körper	field
Kreuzprodukt	cartesian product
Limes	limit
logisch wahr	logically true
logisch falsch	logically false
Mächtigkeit	power
Menge	set
Menge, leer	empty set
Nachfolger	successor
obere Schranke	upper bound
Ordnung	ordering
Potenzmenge	power set
Prädikatenlogik	predicate logic
Quantoren	quantifier
reflexiv	reflexive
Term	term
untere Schranke	lower bound
Vereinigungsmenge	union set
Verkettung	concatenation
Vorgänger	predecessor
Wahrheitstafel	truth table
zweistellig	binary

## Literatur

- [1] Eigene Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung *Mathematik für Informatiker*  
Dr. S.Dachkovski und Prof.Dr. J.Loviscach  
Hochschule Bremen, 2004 - 2005
- [2] Eigene Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung *Analysis I*  
Prof.Dr. E.Oeljeklaus  
Universität Bremen, 2003
- [3] Eigene Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung *Lineare Algebra I*  
Prof.Dr. A.Bunse-Gerstner  
Universität Bremen, 2003
- [4] Konrad Königsberger  
*Analysis I*  
Springer 2001
- [5] Kurt Endl, Wolfgang Luh  
*Analysis I*  
Aula 1989
- [6] Albrecht Beutelspacher  
*Lineare Algebra*  
Vieweg 2003
- [7] Lothar Papula  
*Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler I, II, III*  
Vieweg 2001
- [8] Wolfgang Schäfer, Kurt Georgi, Gisela Trippler  
*Mathematik-Vorkurs*  
Teubner 1999
- [9] Helmut Eirund, Bernd Müller, Gerlinde Schreiber,  
*Formale Beschreibungsverfahren der Informatik*  
Teubner 2000
- [10] Lothar Kusch,  
*Mathematik für Schule und Beruf II – Geometrie*  
Girardet 1972